Lê Trần Nhạc Long (Chủ Biên) – Trần Nguyễn Quốc Cường

CHUYÊN ĐỀ

TOÁN LOGIC VÀ RỜI RẠC

Đà Nẵng 1/2011

Lời nói đầu

Thượng đế có tất cả những lời giải ngắn nhất
và hay nhất của mọi bài toán
(P.Erdos)

Hiện nay các bài toán về lí thuyết tổ hợp càng ngày càng có vẻ xa lạ với học sinh chúng ta và cũng có khi xa lạ với nhiều bạn học sinh chuyên toán, các bạn còn e ngại vì khi nhìn vào các bài toán có vẻ " dao to búa lớn" vì sao? Không hiểu hết đề hay khó quá. Điều đó càng khiến cho những con người tò mò ham học hỏi muốn lao vào. Những bài toán tổ hợp đều làm cho con người rèn một tư duy cao, nó như những câu hỏi IQ thú vị. Có một số bài toán các bạn sẽ nghĩ điều đó hiển nhiên mà sao chứng minh lại khó quá? Đó chính là mấu chốt vấn đề của một bài toán tổ hợp. Để làm tốt các bài toán này cũng đòi hỏi các bạn một tư duy cao, những suy luận tinh tế , sắc bén. Để được như vậy cũng yêu cầu các bạn một sự luyện tập. Trong bài viết này , tôi xin đề cập đến một số vấn đề sơ cấp và phổ biến của toán tổ hợp để mong có thể phần nào truyền tải đến một số bạn yêu toán dễ dàng tiếp cận và cũng ít e ngại hơn với các bài toán tổ hợp nữa. Vì kiến thức còn hạn hẹp nên có một vài sự sai xót , mong các bạn thông cảm .

Qua đây tôi cũng xin giới thiệu với các bạn một số website cho các bạn yêu toán: *w.w.w.diendantoanhoc.net;(Diễn đàn VMF)* và một số diễn đàn khác như: *w.w.w.mathscope.org ; w.w.w.mathlinks.ro ; w.w.w.math.vn*…..ở đó các bạn sẽ học hỏi được nhiều kinh nghiệm và tiếp xúc với bạn bè bốn phương.

Cuối cùng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các anh Phạm Hy Hiếu (Sinh viên đại học ngoại thương Sài Gòn- Huy chương bạc IMO 2009) , anh Võ Quốc Bá Cẩn (sinh viên Đại học Y Dược Cần Thơ) đã sửa chữa, đóng góp giúp tôi hoàn thành bài viết này.Cảm ơn các bạn đã đón đọc bài viết của tôi. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về đựa chỉ: *winwave1995@yahoo.com.vn* hoặc liên hệ trực tiếp qua nick yahoo: **winwave1995**

Lê Trần Nhạc Long

MỤC LỤC

Lời nói đầu……..2

Problem 1:Các bài toán giải bằng **đồ thị**
Lê Trần Nhạc Long……..4

Problem 2:Các bài toán giải bằng **tô màu**
Lê Trần Nhạc Long……10

Problem 3: Nguyên lí bất biến, đơn biến.
Lê Trần Nhạc Long……18

Problem 4: Nguyên lí cực hạn
Trần Nguyễn Quốc Cường……26

Problem 5: Nguyên lí Dirichlet và ứng dụng
Lê Trần Nhạc Long, Võ Quốc Bá Cẩn……41

Problem 6:Các bài toán về trò chơi
Trần Nguyễn Quốc Cường……53

Problem 7:Giới thiệu về định lí **Ramsey-số Ramsey**
Lê Trần Nhạc Long……58

Một số bài tập tổng hợp……..60

Tài liệu tam khảo……63

Problem 1: Lý thuyết đồ thị

"Toán học và con người như hai đỉnh luôn nối với nhau bởi một đoạn thẳng"

Lê Trần Nhạc Long
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn –tp Đà Nẵng

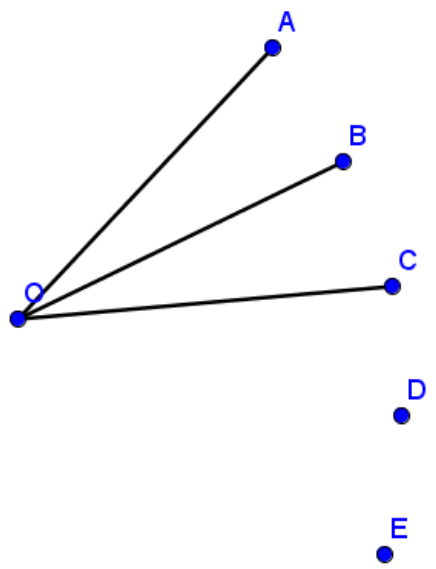
Lý thuyết đồ thị nói chung , đặc biệt đồ thị tô màu được vận dụng để giải *các bài toán không mẫu mực* hiệu quả đặc biêt là *Tổ Hợp Đại Số*

Ta sẽ thể hiện mối qua hệ giữa các giả thiết bài toán trong không gian và có những khẳng định tương ứng về đồ thị tô màu để có vận dụng gải quyết hàng loạt bài toán được xét

Và ta sẽ cùng đi đến những bài toán sau để hiểu rõ thêm về lí thuyết đồ thị

Ví dụ 1: *trong phòng có 6 người chứng minh rằng tồn lại 3 người đôi một quen nhau và đôi một không quen nhau.*

Giải: xét 6 điểm trên mặt phẳng. Chọn 1 điểm bất kì ta dùng đoạn nối liền giữa các điểm thể hiện sự quen nhau và và các điểm nối nét đứt với nhau chỉ sự không quen nhau



Bây giờ ta xét 6 điểm O,A,B,C,D,E lấy O làm tâm ,

Trong 5 điểm còn lại , ta thấy 2 người bất kì hoặc là quen nhau , hoặc là không quen nhau , trên hình theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ít nhất 3 đường thẳng nét liền từ O đến 5 điểm A,B,C,D,E hoặc 3 đường nối nét đứt . Bây giờ ta chỉ cần xét sự quen nhau . thật vậy nếu trong 3 điểm A,B,C mà nối lại với nhau thì ta được 1 tam giác có đỉnh là O => thỏa mãn bài toán, nếu không nối lại thì 3 điểm A,B,C sẽ chỉ nối nhau bằng nét đứt cũng là điều phải chứng minh. Vậy luôn tìm được 3 người đôi một quen nhau hoặc không quen nhau.

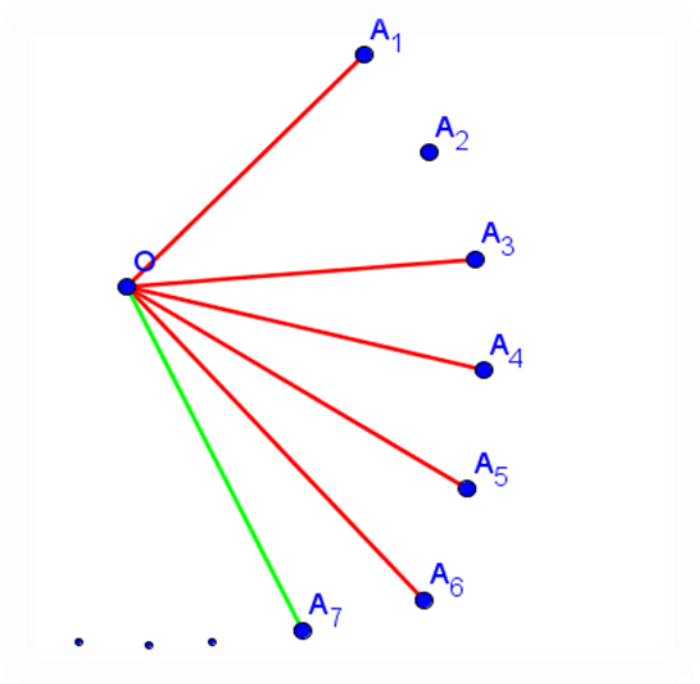
Nhận xét: trong bài này để lời giải ngắn gọn ta có thể dùng thêm mệnh đề Đại số , đó là

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B$$

Bây giờ câu hỏi đặt ra là ta có thể tổng quát bài toán này lên n người mà có k người đôi một quen nhau hoặc m người đôi một không quen nhau được không? Đáp án sẽ được trả lời ở phần sau

Ví dụ 2: *có 17 nhà toán học viết thư cho nhau , viết về 3 đề tài khác nhau mỗi người phải viết thư cho các người còn lại biết, từng cặp nhà toán học viết thư trao đổi cùng một đề tài. Chứng minh rằng có ít nhất 3 nhà toán học viết thư cho nhau trao đổi về cùng 1 đề tài.*

Giải: tư tưởng của chúng ta cũng như bài toán trên.chọn 17 điểm trên mặt phẳng và đặt tên là $OA_1, OA_2, ..., OA_6$ Và cứ 2 điểm bất kì ta dùng màu đỏ nối hai điểm đó chỉ sự trao đổi đề tài thứ nhất , màu xanh là đề tài thứ 2 và vàng chỉ đề tài thứ 3



Giả sử các cạnh được tô nhiều nhất là màu đỏ theo nguyên lí Dirichlet trong 16 cạnh thì có ít nhất 6 cạnh được tô màu đỏ giả sử đó là các cạnh $OA_1, OA_2, ..., OA_6$ trong sáu điểm này nếu có 2 điểm được nối với nhau màu đỏ thì tạo than 1 tam giác màu đỏ có đỉnh là O tức là đã có 3 người trao đổi cùng 1 đề tài. Bây giờ xét 6 điểm này không có 2 điểm nào được nối với nhau màu đỏ thì phải nối với nhau màu xanh hoặc vàng . theo ví dụ 1 thì luôn tồn tại trong 6 điểm đó 3 điêm cùng được nối bởi màu xanh hoặc màu vàng.Vậy bài toán được chứng minh ☺

Ví dụ 3:(*ví dụ này không mang tính đồ thị mà dựa vào tư tưởng của nó)*

Trong một nhóm gồm 2n+1 người , với mỗi n người thì tồn tại 1 người trong 2n+1 người này quen n người đó .Chứng minh rằng

a) Có n+1 người đội một quen nhau
b) Tồn tại 1 người quen hết tất cả các người

Giải:

a) Ta sẽ quy nạp: rõ rằng có 2 người quen nhau , giả sử có k người đôi một quen nhau (k ≤ n) thì tồn tại 1 người quen k người này theo giả thiết => có k+1 người đôi một quen nhau .Do đó tồn tại n+1 người đôi một quen nhau
b) Xét n người còn lại trong câu a thì tồn tại 1 người trong n+1 người này quen n người đó suy ra người này quen tất cả các người còn lại

BÀI TẬP:

Bài 1.1:*(TST Hong Kong 1999) Các học sinh được phát bài kiểm tra , mỗi môn một bài , trong n (n≥ 3)môn học. Biết rằng với mỗi môn học bất kì có đúng 3 học sinh đạt điểm tối ưu ,còn với hai môn tùy ý thì có 1 học sinh đạt điểm tối ưu cho mỗi môn trong cả hai môn đó. Hãy xác định n bé nhất sao cho từ các điều kiện có thể suy ra có đúng 1 học sinh đạt điểm tối ưu cho mỗi môn trong n môn học (ĐS:8)*

Bài 1.2:*Có 3 trường học, mỗi trường học có n học sinh. Một học sinh bất kì có tổng số người quen từ*
hai trường học kia là n+1. Chứng minh rằng có thể chọn được ở mỗi trường 1 học sinh sao cho 3 học sinh này đôi một quen nhau.

Bài 1.3:*trong một phòng có 5 người, giữa 3 người bất kì luôn tìm được 2 người quen nhau và 2 người không quen nhau. Chứng minh rằng nhóm người này có thể ngồi quanh một bàn tròn sao cho mỗi người đều quen hai người ngồi cạnh mình*

Bài 1.4:

Trong một căn phòng có 9 người , biết rằng giữa 3 người bất kì có 2 người quen nhau . Chứng minh rằng, có thể tìm được 4 người mà 2 người bất kì trong số đó đều quen nhau

Bài 1.5:*(Trần Nam Dũng-Preparation VMO-2010) Cho 2010 tập hợp, mỗi tập hợp chứa 45 phần tử. Biết rằng hợp của hai tập hợp bất kỳ chứa đúng 89 phần tử. Hỏi hợp của tất cả các tập hợp nói trên chứa bao nhiêu phần tử?*

LỜI GIẢI CÁC BÀI TẬP DÙNG ĐỒ THỊ

Bài 1.1:*(TST Hong Kong 1999) Các học sinh được phát bài kiểm tra , mỗi môn một bài , trong n (n≥ 3)môn học. Biết rằng với mỗi môn học bất kì có đúng 3 học sinh đạt điểm tối ưu ,còn với hai môn tùy ý thì có 1 học sinh đạt điểm tối ưu cho mỗi môn trong cả hai môn đó. Hãy xác định n bé nhất sao cho từ các điều kiện có thể suy ra có đúng 1 học sinh đạt điểm tối ưu cho mỗi môn trong n môn học*

Giải: Ta sẽ biểu thị mỗi học sinh là một điển trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng , và cứ hai học sinh đạt điểm tối ưu cho trong một môn nào đó ta sẽ nối hai điểm tương ứng lại với nhau. Như vậy trong mỗi môn ta sẽ có duy nhất một tam giác. Vì cứ hai môn bất kì luôn có 1 học sinh đạt điểm tối ưu cho cả 3 môn đó nên giữa hai tam giác luôn có chung đỉnh

Ta có nhận xét sau: nếu 4 tam giác có chung một đỉnh thì tất cả các tam giác đều có ching đỉnh đó. Thật vậy bởi vì nếu không thì tam giác thứ 5 có chung 4 đỉnh với 4 tam giác kia tạo thành 1 tứ giác => vô lí!

Bây giờ xét 1 tam giác bất kì thì nó sẽ có chung đỉnh với mỗi một trong 7 tam giác còn lại. theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại một trong các đỉnh của tam giác đã chọn có chung

đỉnh với ít nhất $\left[\frac{n-2}{3}\right]+1$ tam giác khác. Theo nhận xét trên ta cần

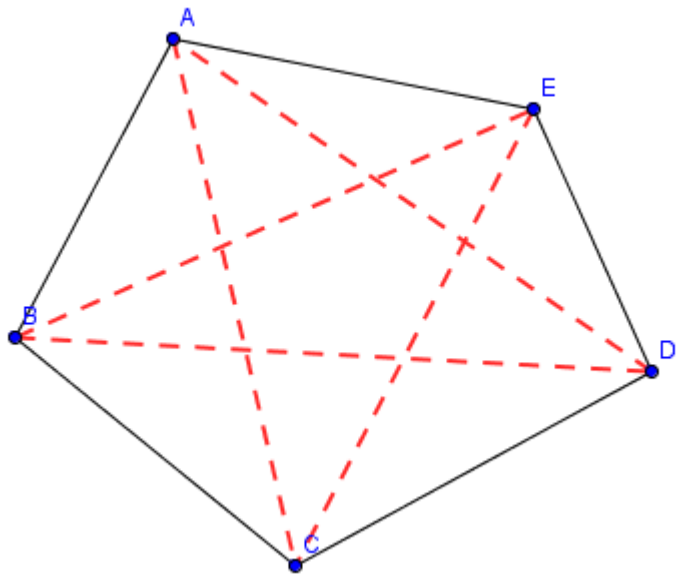
$\left[\frac{n-2}{3}\right]+1 \geq 4 \Rightarrow \left[\frac{n-2}{3}\right] \geq 3 \Rightarrow n \geq 8$. Vậy n nhỏ nhất là 8

Bài 1.2:*Có 3 trường học, mỗi trường học có n học sinh. Một học sinh bất kì có tổng số người quen từ hai trường học kia là n+1. Chứng minh rằng có thể chọn được ở mỗi trường 1 học sinh sao cho 3 học sinh này đôi một quen nhau*

Giải: Trong 3 trường ta chọn ra 1 học sinh có số người quen k $(k \leq n)$ nhiều nhất với một trong hai trường kia.Giả sử người đó là A quen k học sinh ở trường thứ 2. Khi đó sẽ quen *n-k+1* học sinh ở trường thứ 3.Xét học sinh B ở trường số 3 nằm trong số người quen của A, nếu B quen người học sinh C ở trường thứ 2 nằm trong k người quen của A thì A,B,C là 3 người cần tìm. Còn nếu B quen C không nằm trong *k* người quen của A thì B sẽ quen không quá *n-k* học sinh của trường thứ 2 => B sẽ quen không ít hơn *(n+1)-(n-k)=k+1* học sinh của trường 1. Mà theo cách chọn *k* thì *k* là số lớn nhất => mâu thuẫn. vậy bài toán được chứng minh

Bài 1.3:*trong một phòng có 5 người, giữa 3 người bất kì luôn tìm được 2 người quen nhau và 2 người không quen nhau. Chứng minh rằng nhóm người này có thể ngồi quanh một bàn tròn sao cho mỗi người đều quen hai người ngồi cạnh mình*

Giải:



xét mỗi người là 1 điểm trên Mặt phẳng . 5 người này sẽ là 5 điểm ko thẳng hàng và tạo thành một ngũ giác lồi ABCDE

ta sẽ thể hiện các đường được nối liền là chỉ sự quen nhau còn nét đứt là sự ko quen nhau của 2 người bất kì

ta sẽ chứng minh hình trên là điều cần chứng minh . thật vậy nếu ta đã sắp 1 người quen với 2 người ngồi cạnh giả sử người này lại quen với người đối diện tiếp theo giải sử như A quen B và E mà nếu A cũng quen cả C thì Tam giác ACE thỏa mãn đề bài nhưng ABC thì ko vì trong đó sẽ ko có 2 người nào ko quen nhau

do đó cách sắp sếp như trên là duy nhất để thỏa nãm yêu cầu bài toán

Bài 1.4:

a) *Trong một căn phòng có 9 người , biết rằng giữa 3 người bất kì có 2 người quen nhau . Chứng minh rằng, có thể tìm được 4 người mà 2 người bất kì trong số đó đều quen nhau*

Giải: Trên mặt phẳng ta lấy 9 điểm và nếu giữa 2 điểm được tô màu đỏ thể hiện sự quen nhau và màu xanh thể hiện sự không quen nhau có 2 trường hợp xảy ra

TH1: nếu tồn tại một điểm có chung đỉnh với hơn 4 cạnh màu xanh ,giả sử các cạnh đó là OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 vì trong 3 người bất kì có hai người quen nhau nên trong 4 điểm OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 , khổng thể nối với nhau cạnh xanh vì thế chings đều phải nối với nhau màu đỏ => 4 điểm này lập thành một tứ giác có 4 cạnh và các đường chéo cùng là màu đỏ , đây chính là 4 người đôi một quen nhau

TH2:nếu tồn tại một điểm có chung đỉnh với không quá 3 cạnh màu xanh , thì theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ít nhất một đỉnh là đầu mút của hai cạnh màu xanh , ví dụ đó là H, suy ra nó phải là đầu mút của 6 cạnh , mà theo ví dụ một trong 6 đỉnh chứa 6 cạnh ấy luôn tồn tại 3 đỉnh nối với nhau bằng màu đỏ vì không tồn tại 3 điểm nối với nhau mà xanh (giả thiết) , như vậy 3 điểm này hợp với H thành một tứ giác có 4 cạnh và các đướng chéo nối với nhau thành bằng các cạnh màu đỏ => đây là 4 điểm cần tìm

Bài 1.5:*(Trần Nam Dũng-Preparation VMO-2010) Cho 2010 tập hợp, mỗi tập hợp chứa 45 phần tử. Biết rằng hợp của hai tập hợp bất kỳ chứa đúng 89 phần tử. Hỏi hợp của tất cả các tập hợp nói trên chứa bao nhiêu phần tử?*

Giải: Do hợp của hai tập hợp bất kỳ chứa đúng 89 phần tử nên giao hai tập hợp bất kỳ chứa đúng 1 phần tử.

Ta chọn ra một tập hợp A_0 gồm 45 phần tử : $X = \{x_1, x_2, ..., x_{45}\}$

Do 2009 tập hợp còn lại, mỗi tập hợp đều chứa 1 phần tử trong A_0 nên theo nguyên lí Dirichlet ra suy ra có một phần tử trong X (giả sử là x_1) nằm trong ít nhất $\left[\frac{2009}{45}\right] + 1 = 45$ tập hợp. Đặt 45 tập hợp này là A_1 , A_2 , … , A_{45}

Suy ra x_1 nằm trong ít nhất 46 tập hợp (bao gồm 45 tập hợp A_1 , A_2 , … , A_{45} và tập hợp A_0)

Ta chứng minh tất cả các tập hợp còn lại đều chứ x_1 bằng phản chứng : giả sử tồn tại một tập hợp B không chứa x_1 (B nằm trong số 2010 tập hợp đang xét và khác A_0 , A_1 , A_2 , … , A_{45}). Lần lượt xét giao của B với A_0 , A_1 , A_2 , … , A_{45} : $|B \cap A_0| = b_0$; $|B \cap A_1| = b_1$; … ; $|B \cap A_{45}| = b_{45}$. Nhận thấy rằng các tập hợp A_i $(i = 0,1,2,...,45)$ đã có chung một phần tử là x_1 và do đó không có chung phần tử nào khác, từ đó các phần tử b_i $(i = 0,1,2,...,45)$ đôi một phân biệt. Vậy B có ít nhất 46 phần tử (vô lí) .

Điều giả sử là vô lí nên tất cả các tập hợp trong 2010 tập đang xét đều chứa x_1 . Do đó hợp của của tất cả các tập hợp đang xét có : (2010.45-2009) phần tử.

Problem 2: Tô màu

"Toán học muôn màu"

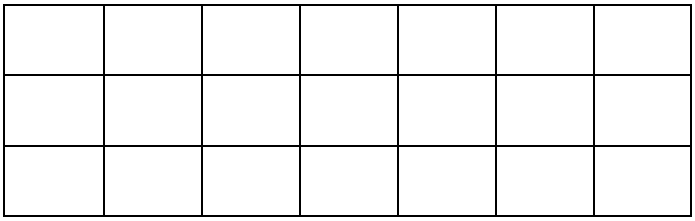
Tô màu nó mang một khái niệm và biểu diễn tương tự như đồ thị nhưng mang tính trừu tượng hơn, tô màu không chỉ là tô các màu mà nó có thể là đánh số hay đặt khái niệm cho một tính chất nào đó trong bài toán
Bây giờ ta cùng đến với các bài toán sau đây

Ví dụ 1: *(Kiểm tra 15'-10A2-LQĐ 2010)Cho một hình chữ nhật 3×7 chia thành 21 ô . Mỗi ô được tô bằng 2 màu xanh hoặc đỏ .chứng minh rằng luôn tồn tại một hình chững nhật không tầm thường có 4 đỉnh được tô cùng một màu.*

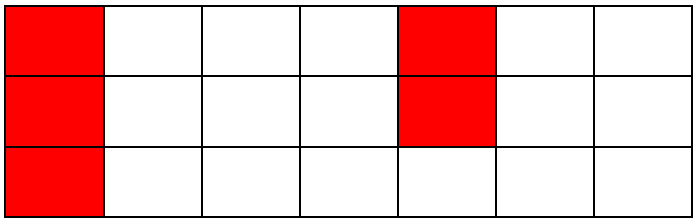
Giải:

Cách 1: (Lê Trần Nhạc Long)

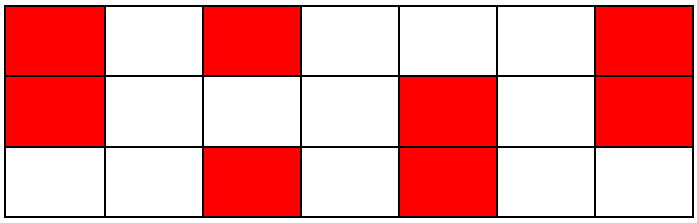
Ta giả sử số ô được tô màu đỏ nhiều hơn số ô được tô màu xanh , theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất 11 ô được tô màu đỏ



Bây giờ ta chỉ xét cách tô màu đỏ. Nếu tồn tại một cột có 3 ô được tô 3 màu thì số màu của 6 ô còn lại là 8 thì theo nguyên lí Dirichlet sẽ tồn tại ít nhất một cột có 2 ô được tô 2 màu và cột có 3 ô tô màu đỏ và cột có 2 ô tô màu đỏ tạo thành 1 hình chữ nhật cần tìm



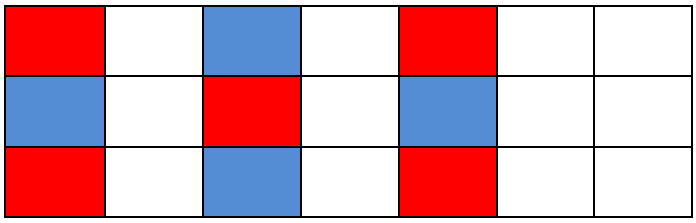
Do đó ta xét mỗi cột chỉ có nhiều nhất 2 ô được tô màu đỏ, theo nguyên lí Dirichlet thì có 4 cột có 2 ô được tô màu đỏ .



Xét theo hang ngang ta có $\mathbb{C}_3^2 = 3$ cách tô cho mỗi cột mà ta lại có 4 cách tô nên theo nguyên lí Dirichlet có 2 cách tô trùng nhau hai cách tô nàylà hai cột tạo thành hình chữ nhật có 4 đỉnh được tô cùng màu.

Cách 2:(Trần Nguyễn Quốc Cường)Cách này thuần túy tô màu

Ta xét hai hàng đầu tiên , hai ô của một cột được tô hai màu giống nhau được gọi là "*cùng màu*", và hai ô được tô hai màu khác nhau được gọi là *"khác màu"* nếu trong 7 cột đó có ba cột *"cùng màu"* thì có hai cột cùng màu đỏ (hoặc xanh) đó là hình chữ nhật có 4 đỉnh do đó mỗi chỉ có thể tồn tại nhiều nhất hai cột *"cùng màu"* khác màu tô tương tự ở hai hang dưới cũng thế nên suy ra tồn tại 3 cột có có hai hang đầu và hai hàng cuối cùng khái niệm khác màu . mặt khác ví dụ các ô trong 1 cột là 1,2,3 thứ tự theo hang nếu 1 khác 2 và 2 khác 3 thì 1 và 3 cùng màu do đó chỉ có hai cách tô nên trong 3 cột đó có 2 cột có cùng 1 cách tô ,hai cột này hợp lại thành 1 hình chữ nhật có 4 đỉnh được tô cùng màu



(hình này ta đang xét màu đỏ)

*Cách 3:(**Trần Nguyễn Quốc Cường**)ta có trong một cột thì luôn có 2 ô cùng màu và có* $2\times\mathbb{C}_3^2=6$ *cách sắp xếp chúng do đó trong 6 cột còn lại luôn có 1 cột trùng với cột được chọn và tạo thành hình chữ nhật có 4 góc cùng màu*

Ví dụ 2: *Cho một hình chữ nhật n×[(n-1)n+1] . Mỗi ô được tô bằng 2 màu xanh hoặc đỏ .chứng minh rằng luôn tồn tại một hình chững nhật không tầm thường có 4 đỉnh được tô cùng một màu.*

Giải: tương tự như cách 3

Ví dụ 3: Phủ hình vuông 5 x 5 bằng các quân tri-mi-no hình chữ L 1×2 sao cho các ô không chườm lên nhau thì còn thừa 1 ô không được phủ. Hỏi ô đó có thể nằm ở vị trí nào?

GIẢI : (Ta có một số cách đánh số , tô màu như sau)

Cách 1:(Hồ Phi Nhạn-12CT-LHP-HCM) Ta đánh số 25 ô vuông của bảng : các ô vuông ở số hàng lẻ và số cột lẻ là số 7 (có 9 ô) ; 16 ô vuông còn lại ta đánh số (-4) (như hình vẽ bên)

7	-4	7	-4	7
-4	-4	-4	-4	-4
7	-4	7	-4	7
-4	-4	-4	-4	-4
7	-4	7	-4	7

Nhận xét khi ta lát một quân tri-mi-no bất kì vào bảng bên thì tổng ba ô số trong quân tri-mi-no ấy hiển nhiên là số âm .

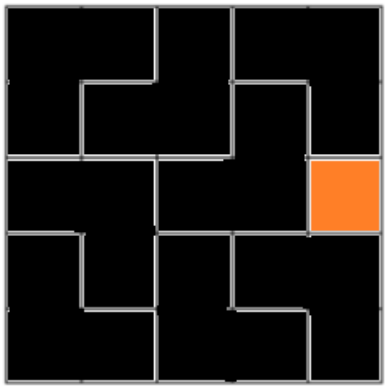
Từ nhận xét trên : Nếu ô không được lát là ô số mang số (-4) thì tổng các ô còn lại là : 7.9+(-4).15 = 3 > 0. Và do đó phần còn lại không thể lát kín bằng các quân tri-mi-no.

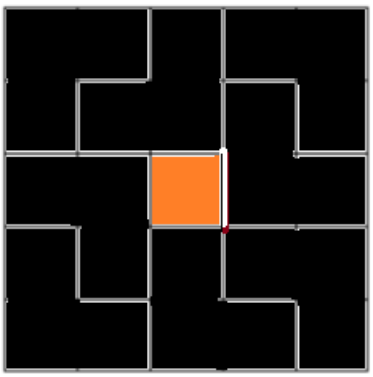
Do đó các ô không được lát chỉ có thể nằm trong số các ô mang số 7. Ta sẽ chỉ ra các ô này đều có thể là ô không được lát .

Do tính đối xứng của hình vuông 5 X 5 ta chỉ cần chỉ ra cách lát trong 3 trường hợp :

- TH1 :

- TH2 :



- TH3  :

Cách 2: ta còn khá nhiều cách đánh số khác ví dụ như sau: các ô cột lẻ hang lẻ ta đánh là -2 còn các ô cột chẵn hang chẵn ta đánh là 1 thì 1 quân tri-mi-no chỉ láy lên các ô -2,1,1 và các quân Tri-mi-no này có 3 ô tổng là 1+1-2=0

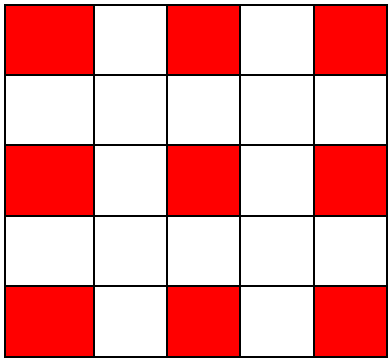
-2	1	-2	1	-2
1	1	1	1	1
-2	1	-2	1	-2
1	1	1	1	1
-2	1	-2	1	-2

Nếu ta bỏ một ô được đánh số 1 thì tổng các ô còn lại của hình vuông là : 9×(-2)+24-9=-3 nhưng các quân Tri-mi-no lại phủ hết tất cả các ô này nên phải có tổng bằng 0. Vô lí!

Còn nếu ta bỏ một trong các ô được đánh số -2 thì tổng của các ô còn lại là

8×(-2)+25-9=0 phù hợp ! vậy các ô được bỏ phải là các ô đánh số -2 . Ta được các cách lát như cách 1

Cách 3:(Từ Nguyễn Thái Sơn PTNK-ĐHQGHCM)Ta tô màu các ô cột lẻ hàng lẻ là màu đỏ



Ta thấy một quân Tri-mi-no không thể lát hai ô màu đỏ nên nếu không có ô màu đỏ nào bị xóa thì số quân tri-mi-no phải lát là 9 cái tương ứng với số ô là 9×3=27>25 vô lí vậy các ô không được lát phải là các ô được tô màu đỏ và ta có cách lát như cách 1

Ví dụ 4: *Chứng minh rằng trong 17 số tự nhiên bất kì luôn tìm ra được 5 số đôi một chia hết cho nhau hoặc đôi một không chia hết cho nhau.*

Giải: ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát như sau:

Chứng minh rằng trong n^2+1số nguyên dương luôn tồn tại n+1 số đôi một chia hết cho nhau hoặc không chia hết cho nhau.

Ta xét dãy số tăng dần sau: $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ ta đánh a_1 là 1 , từ a_i trở đi (i ≥ 2)ta đem chia cho các số a_j với $j < i$ nếu thấy thấy không chia hết thì đánh cho nó giá trị bằng giá trị của số đứng trước cộng thêm 1, còn nếu chia hết cho một nhóm nào đó thì ta đánh giá trị của giá trị số lớn nhất nhóm nếu ta đánh các số đến giá trị n+1 thì theo cách đánh trên sẽ có n+1 số đôi một không chia hết cho nhau vì, $(n+1)^2 > n^2+1$ còn nếu giá trị được đánh không vượt quá n thì theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại giá trị lập lại n+1 lần , tức là ta có n+1 số đôi một chia hết cho nhau. Vậy bài toán được chứng minh ☺

Nhận xét: *ta còn có một kết quả tổng quát hơn:*

Định lí Dilworth (1950):*Trong mọi thứ tự bộ phận trên tập tập hợp P gồm $n \geq sr+1$ phần tử ,tồn tại xích có kích thước s+1 hoặc đối xích có kích thước r+1*

BÀI TẬP:

Bài 2.1 *(Trung Quốc, 1986) mỗi điểm trên mặt phẳng được tô màu đen hoặc đỏ .Chứng minh rằng ta có thể tìm được ba điểm cùng màu mà mỗi cặp điểm có khoảng cách bằng 1 hoặc có thể tìm được ba điểm có khoảng cách bằng* $\sqrt{3}$

Bài 2.2:*Xét hình vuông 7×7 ô. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi 1 ô để phần còn lại không thể phủ kín bằng 15 quân Tri-mi-no kích thước 1×3 và một quân tri –mi-no hình chữ L 2×2*

Bài 2.3: *Trên tờ giấy kẻ caro lấy 101 ô vuông bất kì. CMR trong 101 ô vuông đó có 26 ô vuông không chung cạnh hoặc chung đỉnh.*

Bài 2.4: *Chứng minh rằng một bảng hình vuông 2n×2n, với n không chia cho 3 dư 1, trên đó tồn lại một ô bị xóa đi , có thể phủ bằng các quân Tri-mi-no hình chữ L 1×2*

Bài 2.5 *Cho bảng hình chữ nhật gồm 2010 hàng và 2011 cột. Kí hiệu (m,n)là ô vuông ở hàng thứ m và cột thứ n. Người ta tô các màu vào ô vuông theo nguyên tắc sau: lần thứ nhất tô 3 ô vuông: (r,s), (r+1,s+1), (r+2,s+2), với r và s là 2 số tự nhiên cho trước thỏa mãn điều kiện $1 \leq r \leq 2008$, $1 \leq r \leq 2009$. Từ lần thứ hai trở đi người ta tô đúng 3 ô nằm cạnh nhau ở cùng 1 hàng hay 1 cột. Hỏi bằng cách tô đó có thể tô tất cả các ô trong bảng đã cho hay không*

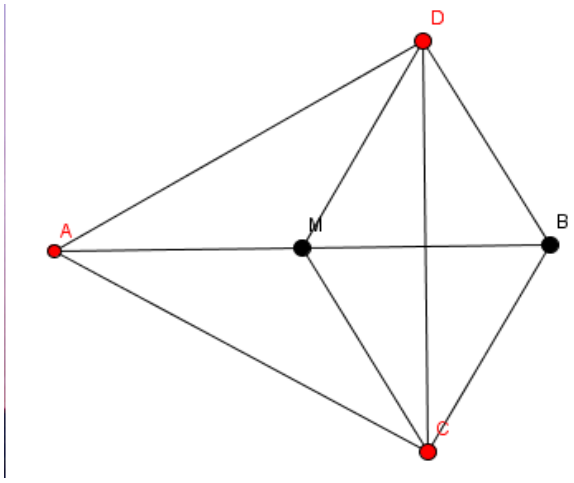
Bài 2.6 *(THTT-T9/398) Người ta tô màu các số nguyên dương bằng hai màu trắng và đen. Biết rằng tổng hai số khác nhau là một số được tô màu đen và có vô hạn số được tô màu trắng. Gọi số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đen là q. Chứng minh q là số nguyên tố.*

LỜI GIẢI CÁC BÀI TẬP TÔ MÀU:

Bài 2.1: *(Trung Quốc, 1986) mỗi điểm trên mặt phẳng được tô màu đen hoặc đỏ .Chứng minh rằng ta có thể tìm được ba điểm cùng màu mà mỗi cặp điểm có khoảng cách bằng 1 hoặc có thể tìm được ba điểm có khoảng cách bằng* $\sqrt{3}$

Giải: ta nhắc lại kiến thức mệnh đề Đại số : $A \vee B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow A$

Bây giờ giả sử không tồn tại 3 điểm cùng màu mà mỗi cặp điểm cách nhau bằng 1. Ta sẽ chứng minh tồn tại 3 điểm cùng màu và mỗi cặp điểm cách nhau $\sqrt{3}$.



Thật vậy, theo giả thuyết trên suy ra tồn tại 2 điểm khác màu nhau có khoảng cách bằng 1. Lấy một điểm sao cho khoảng cách từ nó đến mỗi một trong 2 điểm đó bằng 2.thì điểm này phải khác màu với một trong 2 điểm đã nêu trên. Giả sử hai điểm khác màu có khoảng cách bằng 2 là A và B, gọi M là trung điểm của AB thì nó phải có khoảng cách đến A,B là 1 và cùng màu với A hoặc B. giả sử nó cùng màu với B là màu đen dựng 2 tam giác đều MBD và MBC đối xứng nhau qua MN thì hai tam giác đều này đều có cạnh bằng 1. Theo điều giả sử không tồn tại tam giác đều có 3 đỉnh cùng màu có cạnh bằng 1 nên C và D phải khác màu với M và B=> C và D có cùng màu đỏ. Vậy tam giác đều ACD có 3 đỉnh cùng màu và có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Vậy bài toán được chứng minh

Bài 2.2:*Xét hình vuông 7×7 ô. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi 1 ô để phần còn lại không thể phủ kín bằng 15 quân Tri-mi-no kích thước 1×3 và một quân tri –mi-no hình chữ L 2×2*

1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1

Giải:

Ta sẽ đánh số các số vào các ô như sau:

Ta thấy rằng một quân Tri-mi-no 1×3 sẽ phủ lên các ô có tổng các giá trị chia hết cho 3, còn các ô tri-mi-no hình chữ L sẽ phủ lên các ô có tổng các giá trị không chia hết cho 3 , bây giờ giả sử ta bỏ đi ô số 1 , thì tổng các giá trị của các ô trên bảng hình vuông lúc này là 1×3×7+2×2×7+3×2×7-1=90 , số này chia hết cho 3 => mâu thuẫn! Vậy bài toán được chứng minh!

Bài 2.3: *Trên tờ giấy kẻ caro lấy 101 ô vuông bất kì. CMR trong 101 ô vuông đó có 26 ô vuông không chung cạnh hoặc chung đỉnh.*

Tô màu như hình vẽ:

…	…	…	…	…	…
…	X	Đ	X	Đ	…
…	T	V	T	V	…
…	X	Đ	X	Đ	…
…	T	V	T	V	…
…	…	…	…	…	…

Từ cách tô màu suy ra hai ô cùng màu không có cạnh chung hoặc đỉnh chung.

Vì 101 > 4.25 nên có ít nhất 26 ô cùng màu (đpcm).

Bài 2.4:*Chứng minh rằng một bảng hình vuông 2n×2n, với n không chia cho 3 dư 1, trên đó tồn lại một ô bị xóa đi , có thể phủ bằng các quân Tri-mi-no hình chữ L 1×2*

Giải: Ta sẽ có nhận xét sau:

Hai quân Tri-mi-no ghép lại tạo thành một hình chữ nhật 2×3, ta có n chia cho 3 dư 1=> 2n chia cho 3 dư 2

Do đó nếu ta lắp các hình chữ nhật 2×3 thì trên ô vuông ấy sẽ tồn tại 1 ô vuông ở góc 2×2 không bị lắp do 2n chia 3 dư 2, hình vuông này bỏ đi 1 ô bất kì là hình chữ L 1×2(quân Tri-mi-no) do đó bài toán được chứng minh.

Nhận xét : bài toán có kết quả chặt hơn là các ô bị bỏ đi là các ô nằm ở các hàng , các cột có số tứ tự cùng chia hết cho 3 hoặc cùng không chia hết cho 3

Bài 2.5 *Cho bảng hình chữ nhật gồm 2010 hàng và 2011 cột. Kí hiệu (m,n)là ô vuông ở hàng thứ m và cột thứ n. Người ta tô các màu vào ô vuông theo nguyên tắc sau: lần thứ nhất tô 3 ô vuông: (r,s), (r+1,s+1), (r+2,s+2), với r và s là 2 số tự nhiên cho trước thỏa mãn điều kiện 1≤ r ≤ 2008, 1≤ r≤2009. Từ lần thứ hai trở đi người ta tô đúng 3 ô nằm cạnh nhau ở cùng 1 hàng hay 1 cột. Hỏi bằng cách tô đó có thể tô tất cả các ô trong bảng đã cho hay không*

Giải: ta sẽ chứng minh không thể tô được bằng phản chứng. Thật vậy, giải sử ta có thể tô hết các ô của bảng . khi đó tổng tất cả các lần tô là 670 × 2011 . Điền các số vào các ô theo cách sau: tại ô (m,×) điền số m.n. Gọi tổng các ô đã điền là S , ta có

$$S = (1+2+3+...+2010)(1+2+3+...+2011) \equiv 0(\bmod 3)$$

Mặt khác , gọi S_i là tổng của 3 số nằm tại 3 ô được tô lần thứ i với 1≤ i ≤ 670 × 2010. Dễ thấy : $S_1 = rs + (r+1)(s+1) + (r+2)(s+2) \equiv 2(\bmod 3)$ Và S_i là tổng của 3 số có dạng ab, (a+1)b , (a+2)b ,suy ra $S_i \equiv 0(\bmod 3)$, vậy $S \equiv 2(\bmod 3)$,mâu thuẫn !. Vậy suy ra được đpcm

Bài 2.6 *(THTT-T9/398) Người ta tô màu các số nguyên dương bằng hai màu trắng và đen. Biết rằng tổng hai số khác nhau là một số được tô màu đen và có vô hạn số được tô màu trắng. Gọi số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đen là q. Chứng minh q là số nguyên tố*

Giải: (Lê Văn Tú, 11A1 , THPT chuyên Vĩnh Phúc)

+ Trước hết , giả sử số 1 được tô màu trắng , nếu p được tô màu đen thì $q+1$ cũng được tô màu đen , suy ra $q+2$ cũng được tô màu đen. Cứ tiếp tục như vậy thì mọi số $n > q$ đều được tô màu đen , nên suy ra chỉ có hữu hạn số được tô màu trắng, Vô lí !

+ Nếu $q = 2$ hoặc $q = 3$ thì là số nguyên tố (đpcm). Giả sử $q > 3$. Khi đó $q - 2 \in N^*$, mà $q - 2 < q$ nên được tô màu trắng $\Rightarrow (q-2)+1 = q-1$ được tô màu đen. Nhưng $q - 1 < q$, mâu thuẫn thoe giả thiết.

Vậy bài toán được chứng minh

Problem 3: Nguyên lí bất biến , đơn biến

"Dĩ bất biến, ứng vạn biến"
Tôn tử (Binh pháp)

1. Giới thiệu về đại lượng bất biến, đơn biến

- *Bất biến là mọi đại lượng định tính hay tính chất và quan hệ giữa những phần tử của một hoặc một số tập hợp mà không thay đổi với một biến đổi nào đó*

Định nghĩa. Cho Ω là một tập hợp các *trạng thái*. T là tập hợp *các phép biến đổi* từ Ω vào Ω. Hàm số f: Ω → R được gọi là *bất biến* trên tập các trạng thái Ω đối với tập các phép biến đổi T nếu

$$\boxed{f(t(\omega)) = f(\omega)\ \forall \omega \in \Omega, \forall\ t \in T}.$$

Ví dụ: xét tổng S= a+b+c nếu ta thay đổi a,b,c theo một hoán vị nào đó nhưng rõ ràng S vẫn không đổi, nghĩa là S *bất biến*

- *Đơn biến (còn gọi là bất biến đơn điệu) là đại lượng mà luôn tăng hoặc luôn giảm trong quá trình biến đổi. Sau đây là định nghĩa chặt chẽ của đơn biến.*

Định nghĩa. Cho Ω là một tập hợp các *trạng thái*. T là tập hợp *các phép biến đổi* từ Ω vào Ω. Hàm số f: Ω →N được gọi là *đơn biến* trên tập các trạng thái Ω đối với tập các phép biến đổi T nếu

$$\boxed{f(t(\omega)) < f(\omega)\ \forall \omega \in \Omega, \forall\ t \in T}.$$

Chú ý là dấu bằng đôi khi có thể thay thế bằng dấu >, ≥, ≤. Ngoài ra, tập đích N cũng có thể được thay thế bằng một tập hợp có thứ tự tốt bất kỳ.

Đơn biến được sử dụng trong việc chứng minh một quá trình là dừng

2.Các bài toán về bất biến và đơn biến:

Ví dụ 1: *Trên bảng ta viết 10 dấu cộng và 15 dấu trừ tại các vị trí bất kì. Ta thực hiện xóa hai dấu bất kì trong đó và viết vào đó một dấu cộng nếu xóa hai dấu giống nhau và một dấu trừ nếu xóa hai dấu khác nhau. Hỏi trên bảng còn lại dấu gì nếu ta thực hiện thao tác trên 24 lần?*

Giải:
Cách 1:ta thay mỗi dấu cộng là số 1 và mỗi dấu trừ là số -1. Ta thấy tích của các số trên bảng là -1. Mà theo cách thực hiện của đề bài thì ta xóa đi hai số và viết vào đó tích của 2 số đó, đồng thời ta chỉ thực hiện 24 lần nên suy ra tích của tất cả các số trên bảng sẽ không đổi . Như vậy tích các số trên bảng luôn bằng -1. Do đó khi ta thực hiện thao tác đó 24 lần thì trên bảng còn lại dấu –

Nhận xét: đại lượng bất biến ở đây chính là tích của các số trên bảng . Bây giờ ta sẽ đến với cách tiếp theo để xem còn đại lượng bất biến nào nữa không trong bài toán này.

Cách 2: ta thay dấu cộng bằng số 0 và dấu trừ là số 1. Nếu ta xóa đi hai số có tổng là chẵn thì viết lại số 0 , còn nếu lẻ thì ta viết lại số 1.Nhận thấy rằng sau 1 lần biến đổi thì tổng các số trên bảng hoặc là không đổi hoặc là giảm đi 2. Mà theo cách thay số như thế thì tổng các số trên bảng ban đầu là 15 (một số lẻ),suy ra số cuối cùng trên bảng còn lại phải là số 1. Tức trên bảng còn lại dấu trừ

Nhận xét: như vậy ở cách này ta đã thấy đại lượng bất biến ở đây là tổng chẵn các số.

Ví dụ 2: (*Đề tuyển sinh vào lớp 10 Đại học Sư Phạm Hà Nội-2010)*

Trên 1 bảng đen ta viết 3 số $\sqrt{2}, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}$ *bắt đầu thực hiện 1 trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xóa đi 2 số và viết nào đó trong 3 giả sử là a và b và viết vào 2 vị trí mới xóa hai số mới là* $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$*, đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có 3 số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không thể đồng thời có 3 số* $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$

Giải: ta nhận thấy rằng $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 + b^2$ do đó tổng các bình phương của 3 số sau mỗi lượt chơi đều không đổi. Mà tổng các bình phương của 3 số ban đầu là $\frac{13}{2}$, còn tổng bình phương của 3 số đòi hỏi là $\frac{41}{8} + 2\sqrt{2}$. Như vậy ta không bao giờ nhận được trạng thái đòi hỏi , tức là tồn tại ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$ đòng thời trên bảng

Ví dụ 3: *Chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên khác 0*

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = u^4$$

Giải: Nhìn vào bài toán , rất tự nhiên ta nghĩ đến đầu tiên là việc xét đồng dư cho 2. Tôi xin giải bài toán sau theo tư tưởng của "*Nguyên Lí Cực Hạn"* (sẽ được giớ thiệu ở phần sau). Mà trong bất biến nó còn có tên gọi là *Bất biến đơn điệu*

Giả sử phương trình có nguyện nguyên $(x_0, y_0, z_0, u_0) \neq (0,0,0,0)$

Ta có: $8x_0^4 + 4y_0^4 + 2z_0^4 = u_0^4$, suy ra $u_0^4 \vdots 2 \to u_0 \vdots 2$ đặt $u_0 = 2u_1$

Ta được: $4x_0^4 + 2y_0^4 + z_0^4 = 8u_1^4$, suy ra $z_0^4 \vdots 2 \to z_0 \vdots 2$ đặt $z_0 = 2z_1$

Ta được: $2x_0^4 + y_0^4 + 8z_1^4 = 4u_1^4$, suy ra $y_0^4 \vdots 2 \to y_0^4 \vdots 2$ đặt $y_0 = 2y_1$

Ta được: $x_0^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2u_1^4$, suy ra: $x_0^4 \vdots 2 \to x_0 \vdots 2$ đặt $x_0 = 2x_1$

Ta được: $8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = u_1^4$, vậy (x_1, y_1, z_1, u_1) cũng là một nghiệm của pt (*)

Và nghiệm này có dạng $\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2},\frac{z_0}{2},\frac{u_0}{2}\right)$, quy trình này có thể lặp mãi đến đến bước k:$\left(\frac{x_k}{2},\frac{y_k}{2},\frac{z_k}{2},\frac{u_k}{2}\right)$. Các số $\frac{x_k}{2},\frac{y_k}{2},\frac{z_k}{2},\frac{u_k}{2}$ nguyên với mọi $k\in\mathbb{N}$. Điều này chỉ xảy ra ở các biến bằng 0. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm khác 0.

Nhận xét: *ở (*) nếu theo nguyên lí cực hạn ta có thể giả sử* (x_0,y_0,z_0,u_0) *là bộ nghiệm nhỏ nhất rồi suy ra vô lí. Phương pháp trên còn lại là phương pháp xuống thang*

- *Đặc biệt ở đây , tôi giới thiệu bài toán này chính là minh họa cho "bất biến đơn điệu"*
- *Cách giải theo Bất biến đơn điệu được tóm tắt như sau:*

1. Tìm đại lượng bất biến đơn điệu và chỉ ra nó nó phải thay đổi dưới tác động của một thao tác nào đó

2. Hãy chỉ ra rằng nó có thể thay đổi hữu hạn lần; khi đó chứng minh rằng nó sẽ dừng sự thay đổi sau hữu hạn lần thay đổi nào đó

Nếu sự chuyển đổi không được cho trước , thì ta phải xây dựng một cách thích hợp. có rất nhiều bất biến đơn điệu khác nhau có thể xây dựng như : các tổng, các tích , giá trị cực đại , cực tiểu và nhiều đại lượng thích hợp khác

Ví dụ 4: *Giả sử n là một số lẻ .Đầu viết lên bảng các số từ 1đến 2n, sau đó chọn ra 2 số bất kì a ,b và viết lại 1 số bằng* $|a-b|$ *. Chứng minh rằng số cuối cùng còn lại trên bảng là một số lẻ.*

Giải: Tổng của các số trên bảng ban đầu là:

$S=1+2+\ldots+2n=n(2n+1)$ rõ ràng vì n lẻ nên S lẻ. Mà với thao tác trong đề bài thì tổng sẽ giảm đi $2.\min\{a;b\}$, như thế tính chẵn lẻ của S không đổi , ban đầu S là một số lẻ suy ra số cuối cùng còn lại trên bảng là một số lẻ

<u>Ví dụ 5:</u> *cho các số 2,8, 1,0, 1,9,9,5 được viết trên một vòng tròn. Cứ hai số cạnh nhau ta cộng thêm 1 vào 2 số đó. Hỏi sau một số lần thực hiện thao tác trên các số trên vòng tròn đó có có thể đều bằng nhau không?*

Giải:

<u>*Cách 1*</u>:(Lê Trần Nhạc Long) cách này tương đối tự nhiên và nhanh nhưng không tổng quát được. Cách giải như sau:

Ta nhận thấy tổng các số trong vòng tròn là một số lẻ nên khi ta thực hiện các thao tác trên thì tổng tăng lên 2 nên tính chẵn lẻ của tổng không đổi .Mặt khác số các số trong vòng tròn đó là số chẵn nên nếu các số đều bằng nhau thì tổng cảu nó bây giờ là số lẻ => mâu thuẫn

<u>*Cách 2:*</u>Vì cứ 2 số cạnh nhau thì cùng tăng 1 đơn vị vào cả hai số nên hiệu của chúng không đổi . xét 6 số trên là a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6. Ta suy ra: $S=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$ không đổi

Sau các thao tác. Trong trường hợp này $S=-9$. Nhưng nếu sau một số lần thực hiện thao tác theo đề bài mà các số cùng bằng nhau thì rõ ràng $S=0$. Vô lí! Bài toán được chứng minh.

Nhận xét: ở cách 2 rõ ràng chúng ta có thể tổng quát bài toán. Đây là một bài toán dễ nhưng cần phải biết khai thác ý tưởng bất biến ở sự cùng tăng ở đây.

- Có lẽ qua những ví dụ trên các bạn đều có hình dung được phần nào ý tưởng của một số vấn đề bất biến trên. Bây giờ chúng ta hãy cùng đến với các bài toán sau mang những nét tinh tế hơn về nguyên lí bất biến.

BÀI TẬP VỀ NGUYÊN LÍ BẤT BIẾN, ĐƠN BIẾN

Bài 3.1:*Một tờ giấy được xé thành 6 mảnh , một trong số 6 mảnh nhỏ này lại xé thành 6 mảnh nhỏ nữa, và một trong số 6 mảnh nhỏ này lại được xé thành 6 mảnh,...Vậy cứ tiếp tục xé như vậy thì có khi nào ta được 1995 mảnh giấy hay không ? được 2011 mảnh giấy không?*

Bài 3.2: *Trong một bảng ô vuông có 100×100 ô được điền dấu (+) và dấu (-). Một bước thực hiện bằng cách đổi toàn bộ những dấu ở một hàng hoặc một cột nào đó sang dấu ngược lại. Có khả năng sau hữu hạn bước như trên , bảng ô vuông nhận được đúng 1970 dấu (-) ?*

Bài 3.3:*Trên bảng có các số 1/96, 2/96, 3/96, …, 96/96. Mỗi một lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số a, b bất kỳ trên bảng và thay bằng a + b – 2ab. Hỏi sau 95 lần thực hiện phép xoá, số còn lại trên bảng là số nào?*

Bài 3.4: *Hai người chơi một trò chơi với hai đống kẹo. Đống kẹo thứ nhất có 12 cái và đống kẹo thứ hai có 13 cái. Mỗi người chơi được lấy hai cái kẹo từ một trong hai đống kẹo hoặc chuyển một cái kẹo từ đống thứ nhất sang đống thứ hai. Người chơi nào không thể thực hiện các thao tác trên là như thua . Hãy chứng minh rằng người chơi thứ hai không thể thua , người đó có thể thắng không ?*

Bài 3.5: *Trên một đường tròn ta đặt n số. Nếu thứ tự các số a,b,c,d thỏa mãn (a-d)(b-c)>0, thì hai số b và c đổi chỗ cho nhau. Chứng minh rằng sau một số bước trên thì đường tròn không có bộ tứ nào sắp xếp như vậy.*

Bài 3.6: *Cho 3 số nguyên không âm a, b, c bất kỳ. Mỗi một lần thực hiện, ta biến bộ (a, b, c) thành bộ (|b – c|, |c – a|, |a – b|). Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép biến đổi, ta thu được bộ có chứa số 0.*

Bài 3.7:*Trên một đường tròn ta viết n số tự nhiên. Giữa hai số cạnh nhau ta viết ước số chung lớn nhất . Sau đó xóa những số cũ đi , những số còn lại ta thực hiện theo thao tác trên. Hỏi sau hữu hạn lần thực hiện thao tác thì tất cả các số trên đường tròn có bằng nhau không*

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Bài 3.1:*Một tờ giấy được xé thành 6 mảnh , một trong số 6 mảnh nhỏ này lại xé thành 6 mảnh nhỏ nữa, và một trong số 6 mảnh nhỏ này lại được xé thành 6 mảnh,...Vậy cứ tiếp tục xé như vậy thì có khi nào ta được 1995 mảnh giấy hay không ? được 2011 mảnh giấy không?*

Giải: Ta thấy rằng cứ sau mỗi lần xé thì số giấy lại tăng lên 5 mảnh , ban đầu đã có 6 mảnh, ta suy ra số giấy sau mỗi lần xé luôn có dạng 5k+1 . Đây chính là đại lượng bất biến của bài toán.

- Ta thấy 1995 ≠ 5k+1 nên trường hợp này không thể
- Còn 2011 có dạng 5k+1 nên trường hợp này có thể thực hiện được sau 402 lần

Bài 3.2: *Trong một bảng ô vuông có 1995×1995 ô được điền dấu (+). Một bước thực hiện bằng cách đổi toàn bộ những dấu ở một hàng hoặc một cột nào đó sang dấu ngược lại. Có khả năng sau hữu hạn bước như trên , bảng ô vuông nhận được đúng 2011dấu (-) ?*

Giải: Giả sử sau hữu hạn lần biến đổi trên bảng có đúng 2011 dấu (-) , ta gọi x_i là số lần biến đổi của cột i , và y_j là số lần biến đổi của hàng j. Như vậy ô (i, j) sẽ phải biến đổi $x_i + y_j$ lần . Do đó để ô (i, j) là dấu (-) thì số lần biến đổi ở ô đó phải là số lẻ suy ra: $x_i + y_j$ phải là số lẻ: Ta gọi p là số số lẻ giữa các số x_i , còn q là số số lẻ giữa các số y_j Khi đó số dấu trừ có trên bảng sẽ là:

$$p(1995-q)+q(1995-p)=1995p+1995q-2pq$$

Theo giả sử thì ta có đẳng thức:

$$1995p+1995q-2pq=2011 \qquad (*)$$

Ta thấy rằng $p \& q$ là hai số lẻ, suy ra VT của đẳng thức trên là số chẵn mà VP lại lẻ. Mâu thuẫn.

<u>Nhận xét:</u> ở bài này ta hoàn toàn có thể tổng quát được , bằng cách tahy thế các số 1995 và 2011 cho hợp lí . Để bài toán này mạnh hơn ta sẽ chọn số thích hợp sao cho phương trình ở (*) khó và mang tính số học hơn.

Bài 3.3:*Trên bảng có các số 1/96, 2/96, 3/96, …, 96/96. Mỗi một lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số a, b bất kỳ trên bảng và thay bằng a + b – 2ab. Hỏi sau 95 lần thực hiện phép xoá, số còn lại trên bảng là số nào?*

Giải: Đây là một bài toán tương đối khó , khi nhìn vào chắc hẳn chúng ta không thể nào tìm ra được bất biến của bài toán, và đúng là bài này có bất biến thật và cũng phải rất tinh tế mới có thể nhận ra nó . Ta thấy đại lượng a+b-2ab dường như nó còn thiếu một cái gì đó , để ta đưa nó thành tích hay sao? Các bạn hãy xem lời giải sau, một lời giải đầy ngạc nhiên và thú vị !

Gọi các số trên bảng ban đầu là $a_1, a_2, ..., a_k$, xét tích sau: $(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_k-1)$

ta thấy rằng nếu ta xóa đi hai số a_i, a_j thì tích sẽ mất đi hai thừa số $2a_i-1 \& 2a_j-1$ thêm vào đó tích lại nhận thêm một thừa số : $2(a_i+a_j-2a_ia_j)-1=-(2a_i-1)(2a_j-1)$. Rất đẹp! vậy giá trị tuyệt đối của tích trên không đổi (do có đổi dấu).mà ta thấy rằng : tích ban đầu bằng 0 do có số $\frac{48}{96}=\frac{1}{2}$. Suy ra sau hữu hạn lần biến đổi tích trên vẫn bằng 0 , vậy số còn lại số n có $2n-1=0 \to n=\frac{1}{2}$

Bài 3.4: *Hai người chơi một trò chơi với hai đống kẹo. Đống kẹo thứ nhất có 12 cái và đống kẹo thứ hai có 13 cái. Mỗi người chơi được lấy hai cái kẹo từ một trong hai đống kẹo hoặc chuyển một cái kẹo từ đống thứ nhất sang đống thứ hai. Người chơi nào không thể thực hiện các thao tác trên là như thua . Hãy chứng minh rằng người chơi thứ hai không thể thua , người đó có thể thắng không ?*

Giải: Trước hết chúng ta hãy nghĩ xem, bài này phải có bất biến và bất biến là gì. Đầu tiên ta sẽ nghỉ bất biến là tính chẵn lẻ của tổng hay hiệu của hai đống kẹo vì sau mỗi lần chơi tổng (hay hiệu) số kẹo của 2 đống sẽ tăng hoặc giảm đi 2. Ta thấy rằng người chơi bị thua khi và chỉ khi không còn cái keo nào ở đống thứ nhất và số kẹo còn lại bên đống 2 là 1. Ở bài này ta có thể giải bằng xét tổng hoặc hiệu. Tôi xin giới thiệu một cách về xét hiệu, cách còn lại dành cho bạn đọc. Lời giải như sau:

Ta kí hiệu S là giá trị tuyệt đối của số kẹo trong đống thứ 2 trừ cho số kẹo trong đống thứ nhất. Khởi đầu S=|13-12|=1. Sau mỗi lần chơi S sẽ tăng hoặc giảm đi 2. Như vậy số dư của S cho 4 có dạng lần lượt sau những lần chơi là 1,3,1,3,… Như vậy đến lượt người thứ nhất bốc số dư của S cho 4 là 1 , còn đến lượt người thứ hai bốc số dư của S cho 4 là 3. Mà như đã nói người thua cuộc khi và chỉ khi số kẹo trong đống thứ nhất là 0 còn trong đống thứ 2 là 1. Khi đó S=|1-0|=1. 1 chia cho 4 dư 1 , không phải là 3 , chứng tỏ người thứ 2 luôn có chiến thuật để không thể nào thua.

Mặt khác ta thấy rằng hoặc tổng số kẹo của 2 đống giảm đi , hoặc số kẹo trong đống thứ nhất giảm đi, như vậy trò chơi phải có kết thúc , thế thì người thứ hai thắng

Bài 3.5: *Trên một đường tròn ta đặt n số. Nếu thứ tự các số a,b,c,d thỏa mãn (a-d)(b-c)>0, thì hai số b và c đổi chỗ cho nhau. Chứng minh rằng sau một số bước trên thì đường tròn không có bộ tứ nào sắp xếp như vậy.*

Giải: Gọi S_k là tổng tất cả các tích của hai số đứng cạnh nhau sau lần đổi thứ n ,tổng ban đầu là S_0

Nhận xét khi đổi chỗ một bộ (a,b,c,d) nào đó thì chỉ có tổng các tích của hai số kề nhau của bộ (a,b,c,d) thay đổi mà không có sự thay đổi ở một bộ 4 số bất kì khác.

Giả sử tới sau lần đổi thứ $k-1$ vẫn còn một bộ (a,b,c,d) sắp theo thứ tự đó và thỏa mãn $(a-d)(b-c)>0$ thì ta đổi chỗ b,c

Lúc này $S_k = S'+ac+bd+bc$ trong đó S' là tổng tất cả các tích hai số kề nhau mà không có hai số kề nhau nào thuộc bộ $(a,b,c,d), S_{k-1} = S'+ab+bc+cd$,

Ta có $(a-d)(b-c)>0 \Leftrightarrow ab+cd > ac+bd \Leftrightarrow S_{k-1} > S_k$

Vậy dãy (S_k) là dãy giảm thực sự

Do n hữu hạn nên S_k hữu hạn,có nghĩa là tồn tại $M = \min\{S_k\}$

Vậy sau hữu hạn lần đổi chỗ thì sẽ không tồn tại bộ số cần đổi chỗ nữa

Bài 3.6: *Cho 3 số nguyên không âm a, b, c bất kỳ. Mỗi một lần thực hiện, ta biến bộ (a, b, c) thành bộ (|b – c|, |c – a|, |a – b|). Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép biến đổi, ta thu được bộ có chứa số 0.*

Giải: Đây là một bài đơn biến khá thú vị , dù không khó nhưng ý tưởng khá tự nhiên.

Đặt $M = \max\{a,b,c\}$. Ta chứng minh rằng nếu bộ (a, b, c) không chứa số 0 thì M sẽ giảm sau khi thực hiện phép biến đổi. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử a ≥ b ≥c
Khi đó ta có |b – c| < b ≤ a, | c- a| < a, | a – b| < a, suy ra

max(|b – c|, |c – a|, |a – b|) < a = max(a, b, c).
Như vậy, nếu ta chưa thu được số 0 thì M sẽ nhỏ đi ít nhất một đơn vị (do tính chất của số nguyên). Quá trình này không thể kéo dài vô hạn. Vì thế, chắc chắn phải có lúc nào đó xuất hiện số 0.

<u>Nhận xét:</u> Trong ví dụ trên, max(a, b, c) chính là một đơn biến. Đây là một phương pháp khá hiệu quả để chứng minh một quá trình là dừng. Chú ý rằng phương pháp này thường sử dụng các tính chất cơ bản sau đây của số nguyên:

i) m < n suy ra m ≤ n – 1;

ii) Một tập con bất kỳ của N đều có phần tử nhỏ nhất (tính sắp thứ tự tốt).

Để thấy rõ điều quan trọng của các tính chất xem chừng rất đơn giản này, ta sẽ đưa ra ví dụ cho thấy rằng kết luận ở ví dụ 3 không còn đúng nếu a, b, c không còn là số nguyên (hay đúng hơn, không còn là số hữu tỷ). Thật vậy, gọi α là nghiệm dương của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. *Chọn các số* $a = \alpha^2, b = \alpha, c = 1$ *thì ta có* $|a-b| = \alpha^2 - \alpha = (\alpha-1)\alpha$, $|a-c| = \alpha^2 - 1 = (\alpha-1)(\alpha+1) = (\alpha-1)\alpha^2, |b-c| = \alpha - 1$. *Suy ra bộ số mới tỷ lệ với bộ số cũ theo tỷ lệ α-1. Và như thế, sau n lần thực hiện, bộ số của chúng ta sẽ là* $(\alpha-1)n(\alpha^2, \alpha, 1)$, *không bao giờ chứa 0.*

Bài 3.7:*Trên một đường tròn ta viết n số tự nhiên. Giữa hai số cạnh nhau ta viết ước số chung lớn nhất . Sau đó xóa những số cũ đi , những số còn lại ta thực hiện theo thao tác trên. Hỏi sau hữu hạn lần thực hiện thao tác thì tất cả các số trên đường tròn có bằng nhau không?*

Giải: Bài 4: Gọi a_i^k với $i = 1, 2, ...n$ là các số trên đường tròn sau lần biến đổi thứ k. Đặt [$c = gcd(a_1^0; a_2^0; a_3^0; ...; a_n^0)$, ta có $c \mid a_i^k \forall i, k$.

Gọi m_k; M_k lần lượt là min và max của $\{a_i^k\}$

Ta thấy M_k sau 1 số bước sẽ giảm thực sự còn m_k không tăng. Thật vậy, nếu sau mỗi bước xoay vòng tròn theo chiều kim đồng hồ sao cho các số mới trùng với số vừa xoá gần nó nhất thì số mới luôn nhỏ hơn hoặc bằng số vừa xoá trùng nó. Do vậy $M_{k+1} \le a_i^k \le M_k$ và $m_{k+1} \le a_j^k = m_k$ với i, j nào đó.

Mặt khác, nếu có i sao cho $a_i^k = a_{i+1}^k$ với k nào đó thì sau 1 bước, số các số cạnh nhau bằng nhau như vậy giảm đi và khi không có 2 số lớn nhất bằng nhau thì M_k giảm thực sự. Và khi có k sao cho $\mathrm{m}_k = \mathrm{c}$ thì dãy m_k dừng. Vậy sau 1 số hữu hạn bước ta có m_k không đổi còn M_k giảm dần. Tới khi $\mathrm{m}_k = \mathrm{M}_k$ với k đủ lớn các số trên bằng nhau ta có đpcm.

Problem 4:Nguyên lí cực hạn

"cuộc sống là thế giới vô tận nhưng nó lại có thể gói gọn trong trái tim và khối óc của con người"

Trần Nguyễn Quốc Cường
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn-tp Đà Nẵng

I.KHÁI NIỆM VỀ NGUYÊN LÍ CỰC HẠN

1. Điểm cực hạn

Nói một cách đơn giản điểm cực hạn là những điểm đặc biệt của đối tượng đang xét và nó có vai trò rất quan trọng trong việc khảo sát đối tượng đó.

Ví dụ:

- Trên trục số những vị trí đặc biệt là -1,0,1
- Trong tập hợp những điểm đặc biệt là các phần tử lớn nhất nhỏ nhất.
- Trên một đoạn thẳng những điểm đặc biệt là 2 mút đoạn thẳng hoặc là trung điểm đoạn thẳng đó.

2. Nguyên lí cực hạn

Định lý (sự tồn tại điểm cực hạn của tập hợp): *Trong tập hợp hữu hạn có phần tử là các số thì luôn tồn tại phần tử lớn nhất và nhỏ nhất.*

Nguyên lí trên còn có thể gọi là "*nguyên lí khởi đầu của cực trị*", tuy được phát biểu đơn giản nhưng có ứng dụng lớn trong toán học.

Và ta có hệ quả sau:

Hệ quả: *Nếu một tập hợp gồm các số hữu hạn và có vai trò như nhau thì ta có thể sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần.*

3. Điều kiện để sử dụng nguyên lí cực hạn

- Theo như nội dung định lí để áp dụng nguyên lí cực hạn chỉ ra tồn tại phần tử lớn nhất và nhỏ nhất thì ta cần tập số đang xét là hữu hạn.
- Khi xét sự tồn tại giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một đối tượng thì điều kiện ta cần là miền giá trị của đối tượng đó phải bị chặn và điều nhất thiết là cần phải có cận trên hoặc cận dưới.(Miền giá trị này có thể là vô hạn)

Ví dụ:

- Với tập số tự nhiên thì bị chặn và có cận dưới là 0 do đó khi xét trên tập số tự nhiên ta hoàn toàn có thể giả sử biến có giá trị nhỏ nhất.
- Với điều kiện $3 \le x \le 5$ thì biến x có cả cận trên và cận dưới nên khi xét biến x ta hoàn toàn có thể giả sử x_0 là giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của x.

Do đó nếu bài toán xét trong tập hợp số tự nhiên hoặc số nguyên dương ta đêu có quyền sử dụng nguyên lí cực hạn với phần tử nhỏ nhất.

II. ỨNG DỤNG

1.Ứng dụng trong giải phương trình nghiệm nguyên

Ví dụ 1: *Giải phương trình nghiệm nguyên dương:* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Chắc hẳn bài toán này đã rất quen thuộc với các bạn, ý tưởng chính của bài toán là giải sử có 1 phần tử ở điểm cực hạn,ta giới hạn được giá trị của nó và xét các trường hợp. Sau đây là lời giải đầy đủ cho bài toán này.

Giải:

Không mất tính tổng quát giả sử x là số nhỏ nhất trong 3 số trên. Ta có:

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{x}$$

Do đó dẫn đến $x\le 3$. Ta dễ dàng nhận thấy x phải lớn hơn 1. Vậy xét 2 trường hợp:

- $x=2$

khi đó suy ra: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Ta lại tiếp tục giả sử y nhỏ hơn z khi đó suy ra:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 4$$

Mà rõ ràng $y>2$ nên $y=3$ hoặc $y=4$, khi đó tương ứng ta tìm được $z=6$ và $z=4$.

- $x=3$

Suy ra: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}\Rightarrow x=y=z=3$

Vậy bài toán có các nghiệm:

$$\begin{cases}x=2\\y=3\\z=6\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\y=4\\z=4\end{cases}\qquad\begin{cases}x=3\\y=3\\z=3\end{cases}$$

Và các hoán vị.

Ví dụ 2: *Giải phương trình nghiệm nguyên dương:* $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^2$

Ý tưởng bài toán này tương tự với ví dụ 1 nhưng lần này chúng ta sẽ sắp xếp thứ tự các biến.

Giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z$

- Nếu $x\ge 2$ thì ta luôn có: $y+z\ge 2\ge x$

Ta được:
$(x+y+z)^2 = x^2 + x(y+z) + x(y+z) + (y+z)^2 \geq 2x^2 + 2(y^2+z^2) + 2yz > x^3 + y^3 + z^3$ (vì $2 \geq x \geq y \geq z$)

Do đó trường hợp này loại.

• Nếu $x \geq 4$
Ta sẽ chứng minh khi đó $x^3 + y^3 + z^3 > (x+y+z)^2$

Thật vậy ta có: $x^3 + y^3 + z^3 \geq 4x^2 + (y+z)(y^2 - yz + z^2) \geq 4x^2 + \frac{(y+z)^3}{2}$

Ta cần chứng minh:

$$3x^2 + \frac{(y+z)^3}{2} > 2x(y+z) + (y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x(3x-2y-2z) + (y+z)^2(y+z-2) > 0$$

Ta có: $y+z \geq 2$, nếu $y+z < 6 \Rightarrow 3x-2y-2z > 0$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Khi $y+z \geq 6$ thì ta được:

$2x(3x-2y-2z) + (y+z)^2(y+z-2) \geq 6x^2 - 4x(y+z) + 4(y+z)^2 \geq 5x^2 + (x-2y-2z)^2 > 0$
Do đó với trường hợp $x \geq 4$ ta cũng loại.

Vậy suy ra $x = 3$.

Từ phương trình ban đầu suy ra:

$$27 + y^3 + z^3 = 9 + 6(y+z) + (y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow (y+z)(y^2 - yz + z^2 + y + z + 6) = 18 (*)$$

Vì $x \geq y \geq z \Rightarrow 2 \leq y+z \leq 6$. Mà $y+z$ là ước của 18 nên ta có 3 trường hợp:

- $y+z = 2 \Rightarrow y = z = 1$
- $y+z = 3 \Rightarrow y = 2, z = 1$ vì $y \geq z$
- $y+z = 6$ thay vào phương trình $(*)$ suy ra $y = z = 3$

Vậy ta được các nghiệm:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Và các hoán vị.

Nhận xét:*Lời giải trên có thể không tự nhiên nhưng trên thực tế khi giải bài toán này mình đoán được 2 bộ nghiệm và nhận thấy chúng đều có biến lớn nhất cùng là 3 nên*

dẫn đến ý tưởng chứng minh nó phải bằng 3. Lời giải này mình tìm ra đã khá lâu và hi vọng nó chưa phải là giải pháp tốt nhất cho bài toán này, mong rằng các bạn có thể tự tìm tòi được những giải pháp tốt hơn cho nó.

Ví dụ 3: *Chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên:*

$$x^2 + 7y^2 = 7000$$

Giải:

Bài toán này ta sử dụng một cách chọn điểm cực hạn khác so với các bài toán trên. Giả sử phương trình trên có nghiệm tức tồn tại $(x_0; y_0)$ là một bộ nghiệm của phương trình thỏa mãn tổng các giá trị tuyệt đối của chúng là nhỏ nhất trong các bộ nghiệm, tức là $|x_0| + |y_0|$ có giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$x_0^2 = 7(1000 - y_0^2) \Rightarrow x_0 \vdots 7$, đặt $x_0 = 7x_0^{'}$ ta suy ra : $y_0^2 + 7x_0^{'2} = 7000$

Và vậy bộ nghiệm $(y_0; x_0^{'})$ cũng là nghiệm của phương trình nhưng $|y_0| + |x_0^{'}| < |y_0| + 7|x_0^{'}| = |y_0| + |x_0|$, điều này vô lí với điều giả sử ban đầu nên phương trình không có nghiệm nguyên.

<u>Nhận xét</u>*: Bài toán trên đã khéo léo sử dụng nguyên lí cực hạn với một điều kiện ràng buộc 2 biến và chú ý rằng phương pháp trên còn có tên là "xuống thang". Các bạn có thể tham khảo một số bài toán sử dụng phương pháp này:*

1.Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + 7y^2 = 21xy$
2.Chứng minh phương trình nghiệm nguyên sau chỉ có một bộ duy nhất là nghiệm tầm thường $(0;0;0)$*:* $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 12xyz$
Với cách sử dụng nguyên lí cực hạn tương tự như bài toán trên các bạn có thể thử sức với 2 bài toán khó sau:

- *Giả sử* x *và* y *là các số nguyên dương sao cho* $x^2 + y^2 + 6$ *chia hết cho* xy.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$ *là lập phương của một số tự nhiên.*

- *Cho* a *và* b *là các số nguyên dương sao cho* $a^2 + b^2$ *chia hết cho* $ab + 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ *là số chính phương. (IMO 1988)*

Gợi ý: Với 2 bài toán trên ta sẽ tìm ra đích thị giá trị của biểu thức để kết luận nó là lập phương hay là số chính phương. Đặt giá trị biểu thức là k sau đó xoay phương trình thành phương trình bậc 2 ẩn là một trong 2 biến. Sử dụng định lí Viet và giả sử bộ nghiệm có tổng nhỏ nhất để tìm ra điểm đặc biệt của các nghiệm và suy ra k.

2.<u>Ứng dụng trong chứng minh phản chứng</u>

Một trong những ứng dụng lớn nhất của cực hạn là kết hợp với phương pháp phản chứng. Cực hạn kết hợp phản chứng là một công cụ mạnh để chúng ta giải quyết các bài toán ở hầu hết các lĩnh vực.

Ví dụ 4: : *Với a và n là các số nguyên dương thỏa mãn $a^n - 1$ chia hết cho n thì $a-1$ chia hết ước số nguyên tố nhỏ nhất của n*

Giải:

Gọi p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n thì p là số lẻ. Theo định lí Fermat nhỏ ta có:

$$a^{p-1} \vdots p$$

Gọi r là số nhỏ nhất thỏa mãn $a^r - 1 \vdots p (r > 0)$. Ta có $r \le p-1 < p$. Ta sẽ chứng minh $n \vdots r$. Thật vậy đặt $n = kr + m (0 \le m < r)$. Vì $a^r - 1 \vdots p \Rightarrow a^{kr} - 1 \vdots a^r - 1 \vdots p$. Do đó ta được:

$$a^n - 1 - (a^{kr} - 1) \vdots p \Rightarrow a^{kr+m} - a^{kr} \vdots p \Rightarrow a^{kr}(a^m - 1) \vdots p$$

Dễ thấy a và p nguyên tố cùng nhau nên suy ra $a^m - 1 \vdots p$. Điều này trái với giả sử ban đầu $a^r - 1 \vdots p$ với r là số nhỏ nhất. Do đó suy ra $m = 0$ nên $n \vdots r$.

Nếu $r > 1$ thì r có ít nhất một ước nguyên tố q và do đó $n \vdots q < p$ trái với điều giả sử p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n.

Vậy suy ra $r = 1$. Và do đó ta được $a - 1 \vdots p$.

Từ ví dụ trên ta có thể suy ra một số hệ quả sau:

- Nếu $3^n - 1$ chia hết cho n thì n là số chẵn.
- Với a nguyên dương, $a-1$ không chia hết cho n và $a^n - 1 \vdots n$. Đặt $n = 2^k t$ với t là số lẻ thì $a^n - 1 \vdots n$ khi và chỉ khi $a^{2^k} - 1 \vdots n$.

Ví dụ 5: *(Định lí Bezout) Số d nhỏ nhất thỏa mãn tồn tại các số nguyên x, y để $ax + by = d$ (còn có thể gọi d biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của a và b)với a, b là các số nguyên dương cho trước thì d là ước chung nhỏ nhất của a và b.*

Giải:

Giả sử d là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn tồn tại các số nguyên x, y để $ax + by = d$. Đặt $a = dm + n$ với $0 \le n < d$ suy ra:

$$n = a - dm = a - (ax + by)m = a(1 - xm) + b.(-ym)$$

Vậy n là số nguyên cũng có thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của a và b. Điều này trái với giả sử ban đầu số d là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn. Vậy suy ra $n = 0$. Từ đó suy ra được $a \vdots d, b \vdots d$. Mà có thể thấy rằng nếu một số là ước của a và b thì cũng sẽ là ước của d. Do đó d chính là ước chung lớn nhất của a và b.

Hệ quả thu được từ định lí trên là a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại x, y để $ax + by = 1$.

Và sau đây là một số ví dụ về ứng dụng của "nguyên lí cực hạn" trong các bài toán rời rạc.

Ví dụ 6: *Trong một giải cờ vua có n bạn tham gia và họ thi đấu vòng tròn một lượt với nhau. Biết rằng mỗi trận đấu đều có kết quả thắng thua phân định. Chứng minh ta luôn có cách xếp n bạn này thành 1 hàng sao cho bạn đứng sau thắng bạn đứng trước.*

Giải:

Trong 2 bạn đấu với nhau có kết quả thắng thua phân định thì ta có thể xếp bạn thắng đứng sau bạn thua, do đó ta luôn xếp được 1 hàng mà bạn đứng sau thắng bạn đứng trước (ít nhất là 2), trong các cách xếp hàng đó thì tồn tại một cách xếp có nhiều bạn nhất, gọi số bạn thuộc hàng này là k.

Giả sử bài toán không đúng tức $k < n$. Khi đó sẽ tồn tại một bạn a tham gia và không thuộc hàng đó, xét kết quả của bạn đó với k bạn thuộc hàng thì ta có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: a thắng tất cả thì suy ra a thắng người cuối cùng của hàng và a có thể được xếp ở cuối hàng

Trường hợp 2: a thua tất cả thì dẫn đến a thua bạn đầu tiên của hàng nên a có thể được xếp ở đầu hàng.

Trường hợp 3: Nếu có cả kết quả thắng và thua thì sẽ tồn tại 2 bạn b và c liên tiếp để a thắng b và a thua c. Khi đó ta có thể xếp a giữa b và c.

Như vậy a cũng có thể được xếp vào hàng trên nên điều giả sử ban đầu k là số bạn nhiều nhất là vô lí. Vậy $k = n$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 7: *Có 100 bạn mỗi người cầm 1 quả bong và chơi trò chơi chuyền bong theo qui tắc họ sẽ chuyền bóng của mình đến người đứng gần mình nhất. Chứng minh rằng không có bạn nào nhận được nhiều hơn 6 quả bóng.*

Giải:

Giả sử tồn tại bạn A nhận được n quả bóng từ các bạn $A_1, A_2, ..., A_n$ với $n > 6$. Ta có:

$$A_1AA_2 + A_2AA_3 + ... + A_nAA_1 = 360^0$$

Gọi A_iAA_j là góc nhỏ nhất trong n góc này. Ta có: $A_iAA_j \le \frac{360^0}{n} < \frac{360^0}{6} = 60^0$.

Theo đề bài vì A_i, A_j chuyền bóng đến A nên $AA_j, AA_i < A_iA_j$ mà trong tam giác A_iAA_j thì $A_iAA_j < 60^0$ nên nó phải bé hơn một trong 2 cạnh còn lại. Điều này vô lí. Vậy không tồn tại bạn nào nhận được nhiều hơn 6 quả bóng.

3.Ứng dụng trong giải bất đẳng thức.

Kĩ thuật sắp xếp các biến trong bất đẳng thức đối xứng hoặc giả sử các biến có giá trị đặc biệt (nhỏ nhất, lớn nhất) là một kĩ thuật khá quan trọng trong việc chứng minh bất

đẳng thức. Và đây chính là ứng dụng "nguyên lí cực hạn" trong chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 8: *Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{-\sqrt{3}}{18} \le (a-b)(b-c)(c-a) \le \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Giải:

Một cách tự nhiên ta nghĩ đến việc bình phương biểu thức chứa biến để chỉ đưa về chứng minh một bất đẳng thức:

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \le \frac{1}{108}$$

Giả sử c là số nhỏ nhất trong 3 số khi đó ta có:

$$(b-c)^2 = b^2 - bc - c(b-c) \le b^2, (c-a)^2 = a^2 - c(a-c) - ac \le a^2$$

Vậy ta được: $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \le (a-b)^2 a^2 b^2$

Ta chỉ cần chứng minh: $108(a-b)^2 a^2 b^2 \le 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 3 số ta có:

$$6ab.6ab.3(a-b)^2 \le \left(\frac{6ab+6ab+3(a-b)^2}{3}\right)^3 = (a+b)^6 \le 1$$

Vậy bài toán đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} c=0 \\ (a-b)^2 = 2ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=(2\pm\sqrt{3})b \\ c=0 \end{cases}$$ và các hoán vị.

Ví dụ 9: *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} - \sqrt{abc}$ (Đề thi vào chuyên toán Phan Bội Châu 2010)*

Giải:

Để thuận tiện ta đổi biến $\sqrt{a}=x, \sqrt{b}=y, \sqrt{c}=z$ thì điều kiện trở thành $x^2+y^2+z^2=3$. Ta được: $P = x^2y + y^2z + z^2x - xyz$

Bằng bất đẳng thức cosi cho 3 số ta dễ dàng thấy $P \ge 0$

Không mất tính tổng quát giả sử y là số có giá trị nằm giữa x và z. Ta có:

$$z(y-x)(y-z) \le 0$$

$$\Leftrightarrow y^2z - xyz - yz^2 + z^2x \le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2y+y^2z+z^2x-xyz\le x^2y+yz^2$$

$$\Leftrightarrow P^2\le y^2(x^2+z^2)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 3 số ta được:

$$2y^2.(x^2+z^2).(x^2+z^2)\le\left(\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{3}\right)^3=8$$

$$\Rightarrow P^2\le 4\Rightarrow P\le 2$$

Vậy $P_{max}=2$ xảy ra ở 2 trường hợp:

$$x=y=z \text{ hoặc } \begin{cases} z=0 \\ 2y^2=x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=b=c=1 \text{ hoặc } a=2,b=1,c=0 \text{ và các hoán vị}$$

Đặc biệt trong các bài bất đẳng thức đối xứng thì việc sắp xếp thứ tự các biến là một bước không thể thiếu trong việc sử dụng bất đẳng thức Chebysev.

Ví dụ 10: *Cho a,b,c,d là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\ge\frac{2}{3}$$

Giải:

Không mất tính tổng quát giả sử: $a\ge b\ge c\ge d$ thì ta có:

$$a^2\ge b^2\ge c^2\ge d^2$$

$$\frac{1}{b+c+d}\ge\frac{1}{c+d+a}\ge\frac{1}{d+a+b}\ge\frac{1}{a+b+c}$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức Chebysev:

$$4VT\ge(a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$a+b+c+d\le\sqrt{4(a^2+b^2+c^2+d^2)}=2$$

$$\left((b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)+(a+b+c)\right)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right)\geq 16$$

Do đó suy ra: $\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{16}{6}$

Từ đây dễ dàng suy ra: $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\geq\frac{2}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$

4.<u>Ứng dụng trong hình học</u>

Ví dụ 12: *Chứng minh 4 đường tròn có đường kính là 4 cạnh của một tứ giác phủ kín miền tứ giác đó.*

Giải:

Với M thuộc miền trong tứ giác ABCD thì ta có:

$$AMB+BMC+CMD+DMA=360^0$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử AMB nhỏ nhất, khi đó ta có: $AMB\leq 90^0$. Do đó M thuộc đường tròn đường kính AB. Vậy suy ra đpcm.

5.<u>Định lí Fermat(!!)</u>

Như các bạn đã biết định lí lớn Fermat được coi là định lí nổi tiếng nhất trong toán học. Tuy cách phát biểu đơn giản nhưng nó đã làm đau đầu rất nhiều nhà toán học suốt hàng trăm năm qua. Xin phát biểu lại định lí như sau:

"Không tồn tại các nghiệm nguyên khác không x, y và z thỏa mãn $x^n+y^n=z^n$ trong đó n là một số nguyên lớn hơn 2."

Tuy nhiên trong phạm vi khả năng chúng ta có thể chứng minh bài toán với $n=4$ bằng công cụ mạnh là cực hạn kết hợp phản chứng.

Trước khi đưa ra lời giải với $n=4$ ta hãy xét phương trình trên với $n=2$.

Ví dụ 12: *Giải phương trình nghiệm nguyên:* $x^2+y^2=z^2(*)$

Giải:

Phương trình trên còn có tên gọi là phương trình Pytago.

Trước tiên ta có nhận xét nếu một số là ước chung của 2 trong 3 biến thì nó cũng là ước của biến còn lại. Do đó ta hoàn toàn có thể đưa bài toán trên về phương trình với 3 biến đôi một nguyên tố cùng nhau và ta xét phương trình (*) với x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau. Dễ nhận thấy rằng x và y không thể cùng lẻ vì khi đó z^2 chia 4 dư 2 không là SCP. Giả sử x chẵn thì y và z cùng tính chẵn lẻ. Đặt $x=2k$. Ta có phương trình tương đương với:

$$4k^2 = (z-y)(z+y)$$

Vì z, y nguyên tố cùng nhau và cùng tính chẵn lẻ nên ta có: $(z-y, z+y) = 2$. Do vậy phải tồn tại các số nguyên dương p, q để:

$$\begin{cases} z-y = 2p^2 \\ z+y = 2q^2 \\ pq = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = p^2 + q^2 \\ y = q^2 - p^2 \\ x = 2pq \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x:y:z) = (2pq:(q^2-p^2):(p^2+q^2))$ trong đó $p, q \in N$

Từ bộ nghiệm trên ta có nhận xét. Nếu x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau và x chẵn thì y, z cùng lẻ. Do đó dẫn đến p, q khác tính chẵn lẻ và vì 3 số này đôi một nguyên tố cùng nhau nên $(p, q) = 1$.

Ví dụ 13: *(Định lí Fermat cho $n = 4$) Chứng minh phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ không có nghiệm nguyên khác 0.*

Giải:

Một cách tổng quát hơn ta sẽ chứng minh phương trình: $x^4 + y^4 = z^2 (*)$ không có nghiệm nguyên khác 0.

Vì số mũ của các biến là số chẵn nên ta chỉ cần xét bài toán trên tập số nguyên dương.

Giả sử phương trình $(*)$ có nghiệm thì trong số các bộ nghiệm ta xét bộ nghiệm có z nhỏ nhất. Theo như ví dụ 12 thì phải tồn tại $p, q \in N$ để:

$$\begin{cases} x^2 = 2pq \\ y^2 = q^2 - p^2 \\ z = p^2 + q^2 \end{cases}$$

Ta lại được: $y^2 + p^2 = q^2$ và lại theo phương trình pytago ta nhận thấy tồn tại $u, v \in N, (u, v) = 1$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} y = u^2 - v^2 \\ p = 2uv \\ q = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Do đó suy ra: $x^2 = 4uv(u^2 + v^2)$

Mà ta có $(u,v)=1,(uv,u^2+v^2)=1$ nên u,v,u^2+v^2 đều là các số chính phương. Đặt $u=a^2,v=b^2,u^2+v^2=c^2$ thì ta được: $c^2=a^4+b^4$. Phương trình này có dạng như ban đầu và rõ ràng $c<z$, điều này vô lí với cách chọn z. Do đó phương trình (*) không có nghiệm nguyên.

<u>Kết thúc bài viết là một số bài tập về nguyên lí cực hạn:</u>

Bài5. 1: *Cho tam giác nhọn ABC và điểm P bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến 3 đỉnh A,B,C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.*

Bài 5.2:*Giải phương trình nghiệm nguyên:* $x^2-2y^2=1$

Bài 5.3:*Cho* n^2 *số nguyên không âm được đặt vào các ô trong bảng bao gồm n hàng và n cột. Với việc thực hiện phân bố số vào ô phải thỏa mãn điều kiện sau đây: Nếu một ô nào đó trong bảng viết số 0 thì tổng những số trong cột và trong hàng chứa ô này không nhỏ hơn n. Chứng minh tổng tất cả các ô trong bảng không nhỏ hơn* $\frac{n^2}{2}$

Bài5.4:*Cho 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 1706. Chứng minh rằng tồn tại 3 số trong chúng giả sử là* a,b,c *sao cho* $a<b+c<4a$

Bài 5.5:*Cho các số thực dương* x,y,z *thỏa mãn* $x+y+z=1$. *Chứng minh rằng:*

$$x^2y+y^2z+z^2x\le\frac{27}{4}$$

Bài 5.6:*Cho* $a,b,c\ge 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}\ge\frac{12}{(a+b+c)^2}$$

Bài 5.7:*Cho n số thực* $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ *thỏa mãn:*

$$a_1^{a_2}=a_2^{a_3}=a_3^{a_4}=...=a_{n-1}^{a_n}=a_n^{a_1}$$

Chứng minh rằng nếu n là số lẻ thì $a_1=a_2=....=a_n$.

Bài 5.8:*(Bất đẳng thức Schur) Cho* a,b,c,r *là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\ge 0$$

Bất đẳng thức Schur có rất nhiều ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức. Chú ý với $r=1$ *ta có thể viết bất đẳng thức trên dướng những dạng sau:*

- $a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$
- $(a+b+c)^3+9abc\ge 4(ab+bc+ca)(a+b+c)$
- $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$
- $a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\ge 2(ab+bc+ca)$

Bài 5.9:*Tìm tất cả các tập A có hữu hạn phần tử sao cho với mọi* $x\in A$ *thì* x^2+x-1 *và* $-x^2+x+1$ *cũng thuộc A*

Hướng dẫn giải:

Bài5. 1: *Cho tam giác nhọn ABC và điểm P bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến 3 đỉnh A,B,C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.*Gọi I,J,K lần lượt là hình chiếu của P lên AB,BC,CA.

Giải: Ta có: $PAI + PAK + PBI + PBJ + PCK + PCJ = 180^0$

Không mất tính tổng quát giả sử PAI là góc nhỏ nhất trong các góc này. Suy ra $PAI \le \frac{180^0}{6} = 30^0$.

Suy ra $\frac{PI}{PA} = \sin PAI \le sin30^o = \frac{1}{2}$.

Từ đây suy ra đpcm.

Bài 5.2:*Giải phương trình nghiệm nguyên:* $x^2 - 2y^2 = 1$

Giải: Ta thấy phương trình rõ ràng có nghiệm $(1;0)$ và nếu $(x_0; y_0)$ là một bộ nghiệm của phương trình thì $(3x_0 - 4y_0; 2x_0 - 3y_0)$ cũng là nghiệm.

Thật vậy ta có: $(3x_0 - 4y_0)^2 - 2(2x_0 - 3y_0)^2 = x_0^2 - 2y_0^2$

Vì nếu $(x; y)$ là nghiệm của phương trình thì $(x; -y).(-x; y), (-x; -y)$ cũng là các nghiệm nên ta chỉ xét trường hợp phương trình có các bộ nghiệm không âm.

Vậy phương trình có nghiệm là $(1;0)$ và lớp nghiệm $(3x - 4y; 2x - 3y)$ của nó. Ta sẽ chứng minh lớp nghiệm này là duy nhất.

Giả sử có một bộ nghiệm không âm $(x_0; y_0)$ không thuộc lớp nghiệm trên và có y_0 nhỏ nhất thì ta có $(3x_0 - 4y_0; 2x_0 - 3y_0)$ cũng là nghiệm nên dẫn đến $|2x_0 - 3y_0| \ge y_0$. Suy ra

$$2x_0 - 3y_0 \ge y_0 \text{ hoặc } 2x_0 - 3y_0 \le -y_0$$

$$\Leftrightarrow x_0 \ge 2y_0 \qquad \Leftrightarrow x_0 \le y_0$$

Mà ta có $\begin{cases} x_0 \ge 0 \\ y_0 > 0 \\ x_0^2 - 2y_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_0 < x_0 < 2y_0$ nên điều giả sử trên vô lí.

Vậy bộ nghiệm $(x_0; y_0)$ cũng thuộc lớp nghiệm đã nêu.

Bài 5.3:*Cho n^2 số nguyên không âm được đặt vào các ô trong bảng bao gồm n hàng và n cột. Với việc thực hiện phân bố số vào ô phải thỏa mãn điều kiện sau đây: Nếu một ô nào đó trong bảng viết số 0 thì tổng những số trong cột và trong hàng chứa ô này không nhỏ hơn n. Chứng minh tổng tất cả các ô trong bảng không nhỏ hơn $\frac{n^2}{2}$*

Giải:Xét hàng có tổng các số bé nhất trong các hàng.

Nếu tổng các số ở hàng này lớn hơn $\frac{n}{2}$ thì suy ra tổng của n hàng sẽ lớn hơn $\frac{n^2}{2}$

Nếu tổng các số ở hàng này bé hơn $\frac{n}{2}$ thì dẫn đến có ít nhất $\frac{n}{2}$ số 0 ở hàng này và các cột ứng với các số đó phải đều có tổng không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ vì tổng của cột và hàng không nhỏ hơn n mà hàng đã nhỏ n. Do đó tổng của các cột này sẽ không nhỏ hơn $\frac{n^2}{2}$.

Bài toán được chứng minh.

Bài5.4:*Cho 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 1706. Chứng minh rằng tồn tại 3 số trong chúng giả sử là a,b,c sao cho $a<b+c<4a$*

Giải: Giả sử tồn tại 7 số không thỏa mãn đề bài.Không mất tính tổng quát giả sử 7 số đã cho là $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7$.

Ta có:

$$a_2 \ge a_1+1$$

$$a_3+a_1 \ge 4a_2 \ge 4(a_1+1) \Rightarrow a_3 \ge 3a_1+4$$

$$a_4+a_1 \ge 4a_3 \ge 4(3a_1+4) \Rightarrow a_4 \ge 11a_1+16$$

$$a_5+a_1 \ge 4a_4 \ge 4(11a_1+16) \Rightarrow a_5 \ge 43a_1+64$$

$$a_6+a_1 \ge 4a_5 \Rightarrow a_6 \ge 171a_1+256$$

$$a_7+a_1 \ge 4a_6 \Rightarrow a_7 \ge 683a_1+1024$$

Mà $a_1 \ge 1, a_7 \le 1706$ nên dẫn đến vô lí. Và do đó luôn tìm được 7 số thỏa mãn đề bài.

Bài 5.5:*Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:*

$$x^2y+y^2z+z^2x \le \frac{27}{4}$$

Giải tương tự với ví dụ 9.

Bài 5.6: *Cho* $a,b,c \ge 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2} \ge \frac{12}{(a+b+c)^2}$$

Giải: Gọi c là số nhỏ nhất trong 3 số a,b,c. Ta có:

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2} \ge \frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{ab} \ge \frac{3}{ab} \ge \frac{12}{(a+b)^2} \ge \frac{12}{(a+b+c)^2}$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b, c=0$ và các hoán vị

Bài 5.7: *Cho n số thực* $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ *thỏa mãn:*

$$a_1^{a_2}=a_2^{a_3}=a_3^{a_4}=...=a_{n-1}^{a_n}=a_n^{a_1}$$

Chứng minh rằng nếu n là số lẻ thì $a_1=a_2=....=a_n$.

Giải: Ta dễ dàng thấy rằng tất cả các số trên là cùng dấu và cùng phía với 1. Không mất tính tổng quát giả sử chúng cùng dương và cùng lớn hơn 1.
Giả sử $a_i=M=max\{a_1;...;a_n\}$ thì suy ra $a_{i+1}=a_{i-1}=m=min\{a_1;...;a_n\}$.

Và cứ lập luận tương tự thì ta suy ra trong dãy số $a_1;a_2;...;a_n$ các số min và max xếp xen kẽ nhau. Do đó các số có chỉ số cùng tính chẵn lẻ thì bằng nhau. Dẫn đến a_1 và a_n cùng max hoặc cùng min. Điều này chỉ xảy ra khi $M=m$. Vậy tất cả các số đều bằng nhau.

Bài 5.8: *(Bất đẳng thức Schur) Cho* a,b,c,r *là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b) \ge 0$$

Giải: Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó ta có: $c^r(c-a)(c-b) \ge 0$.
Mặt khác lại có:

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a) \ge a^r(a-b)(b-c)+b^r(b-c)(b-a)=(a-b)(b-c)(a^r-b^r) \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi 3 số cùng bằng nhau hoặc 1 số bằng 0, 2 số còn lại bằng nhau.

Bài 5.9: *Tìm tất cả các tập A có hữu hạn phần tử sao cho với mọi* $x \in A$ *thì* x^2+x-1 *và* $-x^2+x+1$ *cũng thuộc A*

Giải: Gọi B là tập hợp thỏa mãn đề bài và tất cả các tập thỏa mãn đều là con của B.
Vì tập B có hữu hạn phần tử nên tồn tại y là phần tử nhỏ nhất thuộc B thì ta có
$y^2+y-1 \ge y$ và $-y^2+y+1 \ge y$. Suy ra $y^2=1 \Rightarrow y=1, y=-1$

Tương tự gọi y' là phần tử lớn nhất thì suy ra $y'^2=1$. Từ đây ta có thể thấy.

$y=-1, y'=1$.Ngoài ra nghiệm của các hệ phương trình sau cũng thuộc B.

$\begin{cases} x^2+x-1=1 \\ -x^2+x+1=-1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x^2+x-1=-1 \\ -x^2+x+1=1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vô nghiệm. $x=0$ (vì x khác 1 và -1)

Bây giờ ta chứng minh rằng B chỉ có 3 phần tử là 0,1 và -1. Thật vậy khi x nằm trong 2 khoảng (0;1) và (-1;0) thì một trong 2 số x^2+x-1 và $-x^2+x+1$ sẽ nằm ngoài khoảng (-1;1). Dẫn đến vô lí.

Ta có 4 tập thỏa mãn đề bài:

{-1;1},{1},{-1},{0;-1;1}

Problem 5: Nguyên lí Dirichlet

"cuộc sống là chuỗi những bài toán mà ta tìm kiếm lời giải"
Lê Trần Nhạc Long

Nguyên lí Dirichlet (thuật ngữ tiếng Anh: *the pigeonhole principle* , cũng có nơi gọi là *the drawer principle*) và còn được gọi là *nguyên lí chuồng và thỏ*. Ở dạng đơn giản nhất được phát biểu đầu tiên bởi G.Lejeune Dirichlet (1805-1859)

"*Nếu nhốt* $n+1$ *con thỏ vào* n *cái chuồng (* $n \in \mathbb{N}^*$ *)thì ta luôn có (ít nhất là) hai con thỏ bị nhốt trong cùng một chuồng"*

Một cách tổng quát ta có nguyên lí Dirichlet mở rộng:

"Nếu nhốt m *con thỏ vào n cái chuồng* $(m,n \in \mathbb{N}^*)$ *thì luôn tồn tại một chuồng chứa ít nhất là* $1+\left[\frac{m-1}{n}\right]$ *con thỏ"*

Ở đây kí hiệu $[a]$ là phần nguyên của số thực a, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá a

Tuy nguyên lí Dirichlet nhìn khá đơn giản nhưng lại có rất nhiều ứng dụng , hiệu quả đến bất ngờ, sử dụng nó ta có thể chứng minh được nhiều kết quả sâu sắc cảu toán học . Vì thế tại các kì thi học sinh giỏi toán ,nguyên lí Dirichlet thường được khai thác. Và ở những chủ đề trên cũng có một số bài sử dụng đến nguyên lí Dirichlet , nhưng sau đây sẽ là một số ví dụ cụ thể.

Ví dụ 1: *Trong một buổi lễ giáng sinh có 2010 người tham dự , biết rằng cứ 25 người bất kì thì có 12 người cùng đội một kiểu mũ no-el. Chứng minh rằng trong buổi lễ này có ít nhất 144 người cùng đội một cỡ mũ no-el .*

Giải: Vì trong 25 người có 12 người cùng cỡ mũ no-el nên suy ra có nhiều nhất là 25-12+1=14 cỡ mũ, theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất $\left[\frac{2010}{14}\right]+1=144$ người cùng đội một cỡ mũ.

Ví dụ 2:(Bồi dưỡng hè:10A2-LQĐ-ĐN) *Cho 30 số nguyên dương có thể trùng nhau sao cho tổng của chúng không vượt quá 45. Chứng minh rằng luôn tồn tại trong 30 số nguyên dương đó một dãy số liên tiếp có tổng bằng*

a) 14

b) 11

Giải: Với những bài toán yêu cầu đưa về dãy tổng hoặc dãy tích liên tiếp thì ta sẽ đặt $S_i = a_1 + a_2 + ...a_i$, còn với tích thì $N_i = a_1.a_2...a_i$

Và bây giờ ta sẽ giải bài toán như sau:

đặt 30 số nghuyên đó là $a_1, a_2, ...a_{30}$ và đặt

$S_i = a_1 + a_2 + ... + a_i$ ($i \le 30$)

rõ ràng ta có 30 số S_i ta có theo Dirichle thì trong 30 số này tồn tại ít nhất 3 số cùng số dư khi chia cho 14

và hiệu của chúng có thể là các số 14;28;42 ., mà rõ ràng với 3 số thì ta sẽ có tương ứng $\mathbb{C}_3^2 = 3$ hiệu , nên rõ ràng nếu trong 3 hiệu này khong có 14 thì tổng của các số số dương đó nhỏ nhất là 46, mâu thuẫn.! vậy bài toán được chứng minh

còn với 11 ta xét các hiệu số sau 11,22,33,44 cũng tương tự như trên

Ví dụ 3: *(VMO 2011-ngày thứ nhất) Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có các cạnh và 2 đường chéo AC, AD có độ dài không vượt quá $\sqrt{3}$. Trong ngũ giác lồi lấy 2011 điểm phân biệt bất kì. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác lồi $ABCDE$ và chứa ít nhất 403 điểm trong số 2011 điểm đã cho*

Giải: Đây là một trong hai bài dễ nhất của ngày thi thứ nhất , vì ý tưởng khá rõ ràng.

Rất tự nhiên theo giả thiết ta sẽ nối AC, AD lại và ngũ giác ABCDE được chia thành 3 tam giác , mỗi tam giác có cạnh không vượt quá $\sqrt{3}$. Ý tưởng của chúng ta là sẽ chứng minh 5 đường tròn sẽ phủ hết ngũ giác này vì nếu đúng như thế thì theo nguyên lí Dirichlet tồn lại một đường tròn chứa ít nhất $\left[\frac{2011}{5}\right] + 1 = 403$. Đó là điều cần chứng minh.Và ta sẽ chứng minh ý tưởng đó như sau.

Khi chia ngũ giác ra 3 phần như đã nói thì tam giác lớn nhất mà 3 tam giác này có thể đạt được là tam giác đều cạnh $\sqrt{3}$. Thật vậy xét tam giác đều ABC như vậy có tâm ngoại tiếp là O. Ta dễ dàng tính được OA=OB=OC=1. Vậy nếu xét 3 đường tròn có tâm nằm trên 3 đỉnh của tam giác và có bán kính là 1 (đường tròn đơn vị) thì nó đồng quy tại O và phủ hết tam giác ABC, như thế bây giờ xét 2 tam giác còn lại ta cũng có điều tương tự. Ghép 3 tam giác này lại thành ngũ giác ABCDE thì ta suy ra 5 đường tròn có

tâm nằm trên 5 đỉnh của ngũ giác và có bán kính bằng 1 sẽ phủ hết ngũ giác này. Như vậy bài toán được chứng minh

- *Ứng dụng của nguyên lí Dirichlet ngoài những dạng toán tổ hợp nó còn có nhiều ứng dụng khác, đặc biệt trong chứng minh bất đẳng thức. Và vấn đề này sẽ được chúng tôi minh họa dưới đây*

Võ Quốc Bá Cẩn

Sinh viên Đại học y dược Cần Thơ

❖ *Theo kinh nghiệm thường thấy thì các bất đẳng thức ít biến dễ chứng minh hơn các bất đẳng thức nhiều biến. Sau đây chúng ta sẽ tiếp cận với kĩ thuật dùng nguyên lí Dirichlet để đánh giá các biến , đưa bài toán trở về dạng đơn giản hơn.*

Theo nguyên lí Dirichlet ta biết rằng với ba biến a,b,c và một số thực k bất kì thì trong ba số $a-k, b-k, c-k$ có hai số hoặc cùng bằng 0 hoặc cùng dấu.Giả sử hai số đó là b và c. Dễ thấy $(b-k)(c-k)\ge 0$. Từ đó ta suy ra:

$$b^2+c^2=k^2+(b+c-k)^2-2(b-k)(c-k)\le k^2+(b+c-k)^2$$

Như vậy , một bài toán bất đẳng thức có giả thiết $a+b+c=s$ (hoặc thuần nhất thì chuẩn hóa) và đẳng thức xảy ra khi nó bằng một giá trị m nào đó thì ta có thể sử dụng đánh giá trên để làm giảm số biến của của bất đẳng thức ban đầu. Cụ thể là ta sẽ chọn $k=m$ (để đảm bảo dấu bằng) và như thế ta sẽ có

$$b^2+c^2\le m^2+(b+c-m)^2=m^2+(s-a-m)^2$$

Và như thế khi ta đã đánh giá được bất đẳng thức như vậy thì bài toán được đưa về 1 biến. Để hiểu thêm về vấn đề này, sau đây là một số ví dụ minh họa

Ví dụ 4:*Cho các số thực a,b,c thỏa mãn* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le\frac{9}{10}$$

(Polish Mathematical Olympiad 1996)

Giải: Bài này ta có thể đánh giá bằng bất đẳng thức AM-GM. Nhưng để minh họa cho cho kĩ thuật trên ta có lời giải sau:

Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra tại một bộ điểm duy nhất là $a=b=c=\frac{1}{3}$. Do đó, bằng cách gọi b,c là hai số sao cho $\left(b-\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{1}{3}\right)\ge 0$ và tiến hành đánh giá như trên ta có:

$$b^2+c^2\le\frac{1}{9}+\left(b+c-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}-a\right)^2 \quad (*)$$

Muốn áp dụng $Cauchy-Schwarz$ để có đại lượng b^2+c^2 xuất hiện, ta cần chuyển vế hai phân thức $\frac{b}{b^2+1},\frac{c}{c^2+1}$ và thêm bớt để có bình phương xuất hiện. Ta biến đổi như sau: Bất đẳng thức cho tương đương với:

$$\frac{a}{a^2+1}\le\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{b^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{c^2+1}\right)-\frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(b-1)^2}{b^2+1}+\frac{(c+1)^2}{c^2+1}\ge\frac{1}{5}+\frac{2a}{a^2+1}$$

Bây giờ ta có thể sử dụng $Cauchy-Schwarz$ và đánh giá (*) ở trên,

$$\frac{(b-1)^2}{b^2+1}+\frac{(c+1)^2}{c^2+1}\ge\frac{\left[(b-1)+(c-1)\right]^2}{(b^2+1)+(c^2+1)}=\frac{(a+1)^2}{(b^2+c^2)+2}$$
$$\ge\frac{(1+a)^2}{\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}-a\right)^2+2}=\frac{9(1+a)^2}{23-12a+9a^2}$$

Như vậy ta chỉ còn phải chứng minh một bất đẳng thức một biến là

$$\frac{9(1+a)^2}{23-12a+9a^2}\ge\frac{1+10a+a^2}{5(1+a)^2}$$

Vì bất đẳng thức thức của chúng ta qua những quá trình đánh giá vẫn luôn đảm bảo dấu bằng nên ta luôn phân tích được $(3a-1)^2$ làm nhân tử chung. Thật vậy sau khi thu gọn bất đẳng thức trở thành

$$(3a-1)^2(2a^2+2a+11)\ge 0$$

Hiển nhiên đúng

Ví dụ 5: *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta đều có:*

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}$$

(Japanese Mathematical Olympiad 1997)

Giải: Do bất đẳng thức đã cho thuần nhất với a,b,c nên ta có thể chuẩn hóa $a+b+c=1$.Khi đó nó được viết lại thành

$$\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1}+\frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1}+\frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1}\ge\frac{3}{5}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $\left(b-\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{1}{3}\right)\ge 0$. Ta có

$$b^2+c^2\le\frac{1}{9}+\left(b+c-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}-a\right)^2$$

Bây giờ sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-schwarz$ ta được

$$\frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1}+\frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1}\ge\frac{\left[(1-2b)+(1-2c)\right]^2}{(2b^2-2b+1)+(2c^2-2c+1)}$$

Mà ta có

Mà ta có:

$$\frac{\left[(1-2b)+(1-2c)\right]^2}{(2b^2-2b+1)+(2c^2-2c+1)}=\frac{2a^2}{b^2+c^2+a}\geq\frac{2a^2}{\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}-a\right)^2+a}=\frac{18a^2}{9a^2-3a+5}$$

Bài toán được đưa về chứng minh:

$$\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1}+\frac{18a^2}{9a^2-3a+5}\geq\frac{3}{5}$$

Sau khi khai triển và rút gọn ta được một bất đăngr thức hiển nhiên đúng

$$(3a-1)^2(17a^2-8a+5)\geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Một mảnh đất không thể thiếu trong mục ứng dụng dirichle đó là các bài toán số học. Hầu hết định lí dirichle trong số học được dùng để chứng minh các bài toán chia hết. Chúng ta hãy tiếp tục đến với các ví dụ sau đây:

Ví dụ 6: *Cho 17 số tự nhiên. Chứng minh trong 17 số này ta có thể chọn ra 9 số sao cho tổng của chúng chia hết cho 9.*

Giải: Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Trong 5 số tự nhiên bất kì luôn chọn được 3 số có tổng chia hết cho 3.

Thật vậy, xét số dư của 5 số này cho 3. Nếu có 3 số có số dư khác nhau khi chia cho 3 (tức lần lượt là 0,1,2) thì tổng của chúng sẽ chia hết cho 3.Nhưng nếu chỉ có 2 loại số dư thì trong 5 số theo nguyên lí dirichle sẽ có 3 số đồng dư khi chia cho 3. Và tổng 3 số này lại chia hết cho 3. Do đó ta luôn chọn được 3 trong 5 số chia hết cho 3.

Áp dụng bổ đề này 5 lần thì ta sẽ thu được 5 bộ có 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3 từ 17 số đã cho. Lấy tổng của các số trong mỗi bộ đem chia cho 3 được 5 bộ mới và lại áp dụng bổ để một lần nữa suy ra có 3 bộ trong 5 bộ mới này có tổng chia hết cho 3. Ta nhân 3 mỗi bộ này để phục hồi lại trạng thái ban đầu thì dẫn đến tổng của 3 bộ vừa chọn sẽ chia hết cho 9 và có 9 số hạng. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 7: *Cho dãy số Fibonacci:*

$$\begin{cases}u_0=u_1=1\\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\end{cases}$$

Chứng minh trong n^2-3n+4 *số đầu tiên của dãy thì tồn tại một số chia hết cho* n.

Giải:

Xét các số u_0 đến u_{n^2-3n+3} của dãy. Giả sử không có số nào trong các số này chia hết cho n.

Gọi a_k là số dư của u_k cho n thì $a_k\in\{1;...;n-1\}$

Xét các cặp $(a_k;a_{k+1})$ với $k=\overline{0,n^2-3n+2}$. Ta có n^2-3n+3 cặp. Chú ý với $p>0$ mà $a_p=a_{p+1}$ ta suy ra $a_{p-1}=a_{p+1}-a_p=0$. Dẫn đến u_{p-1} chia hết cho n.

Do đó trong mỗi cặp thì các số khác nhau. Vì $a_k\in\{1;...;n-1\}$ và trong mỗi cặp 2 số không giống nhau nên số giá trị mà các cặp có thể nhận được là $(n-1)(n-2)$. Theo nguyên lí dirichle suy ra phải có 2 cặp nhận cặp giá trị giống nhau tức tồn tại i, j mà

$a_i = a_j, a_{i+1} = a_{j+1}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $i < j$ và i là nhỏ nhất (đây là nguyên lí cực hạn các bạn có thể tham khảo thêm ở phần sau) . Dễ thấy rằng nếu $i > 0$ thì từ $(a_i; a_{i+1}) = (a_j; a_{j+1})$ ta có thể suy ra $(a_{i-1}; a_i) = (a_{j-1}; a_j)$. Nhưng điều này trái với cách giả sử i là số nhỏ nhất. Do đó $i = 0$. Vì vậy ta được:
$(a_i; a_{i+1}) = (a_j; a_{j+1}) = (1;1) \Rightarrow a_j = a_{j+1} = 1$ với $j > 0$. Điều này vô lí. Vậy điều giả sử ban đầu là sai.Ta suy ra đpcm.

Kết thúc một vài ví dụ trên có lẽ chúng ta đã hiểu và biết được phần nào về ứng dụng của nguyên lí Dirichlet . Và để tìm hiểu sâu hơn về nguyên lí này chúng ta sẽ cùng đến với những bài tập hay hơn, đòi hỏi sự tinh tế và việc xác định đúng yếu tố khi sử dụng nguyên lí Dirichlet

Bài tập về nguyên lí Dirichlet

Bài 5.1: *CMR tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2011*

Bài 5.2: *Trong mặt phẳng cho 2007 điểm. Biết rằng trong 3 điểm bất kì lấy từ các điểm đã cho luôn có hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. CMR có 1004 điểm nằm trong hình tròn bán kính 1.*

Bài 5.3: *Cho đa giác đều* $A_1, A_2, ...A_{1998}$ *nội tiếp (O). CMR trong số 64 đỉnh bất kì của đa giác luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.*

Bài 5.4:*(Trần Quốc Anh) Cho các số thực a,b,c, thỏa mãn* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{6a^2-4a+1}+\frac{b^2}{6b^2-4b+1}+\frac{c^2}{6c^2-4c+1}\le 1$$

Bài 5.5:*(Lê Trần Nhạc Long) Trong một đường tròn bán kính* $\sqrt{3}$ *ta tô 2011 điểm bất kì. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đơn vị nằm có tâm nằm trong miền của đường tròn lớn, chứa 288 điểm trong 2011 điểm đó.*

Bài 5.6 *Trong mặt phẳng cho n - giác lồi có tọa độ các đỉnh là các số nguyên (n > 4).*

a) CMR ở trên cạnh hoặc trong đa giác đó còn có ít nhất một điểm nguyên khác nữa.

b) CMR bên trong đa giác đó còn có ít nhất một điểm nguyên khác nữa.

Bài 5.7:*Bên trong tam giác đều ABC cạnh 1 đặt 5 điểm. CMR tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 0,5.*

Bài 5.8: *(Vô địch Cộng hòa Czech 1998) Cho X là một tập hợp gồm 14 số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng có một số nguyên dương k ≤ 7 và có hai tập con k phần tử*

$$\{a_1, a_2, ...a_k\}, \{b_1, b_2, ..., b_n\}$$

Rời nhau của X sao cho:

$$\left|\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)-\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_k}\right)\right|<\frac{1}{1000}$$

Bài 5.9: *(Putnam 1993) Cho một dãy gồm 19 số nguyên dương không vượt quá 93 và một dãy số nguyên gồm 93 số nguyên dương không vượt quá 19. Chứng minh rằng từ hai dãy số đó ta có thể trích ra hai dãy con có tổng các số hạng là bằng nhau*

Lời giải các bài tập về nguyên lí Dirichlet

Bài 5.1: *CMR tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2011*

Giải: Ở bài này cái ta cần đi tìm là yếu tố nào là cái ta cần xét. Thực chất những con số trên cũng không có ảnh hưởng đến bài toán là bao. Bây giờ ta xét dãy số gồm 2012 sau

$$1,11,111,...,11...1$$

Rõ ràng trong 2012 số này tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2011. Suy ra hiệu của chúng phải chia hết cho 2011. Giả sử hai số đó là:

$\underbrace{11...11}_{n}$ và số $\underset{k}{11...1}$. Hiệu của hai số này bằng $\underset{n-k}{11...1}.10^k$ với $(n>k)$

Mà ta có : $(2011;10^k)=1$. Do đó $\underset{n-k}{11...1} \vdots 2011$. Bài toán được chứng minh

Bài 5.2: *Trong mặt phẳng cho 2007 điểm. Biết rằng trong 3 điểm bất kì lấy từ các điểm đã cho luôn có hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. CMR có 1004 điểm nằm trong hình tròn bán kính 1.*

Giải: Bài này khá giống bài ở ví dụ 1. Nhưng nhìn kĩ thì ý tưởng của nó lại khác

Bây giờ xét đường tròn (O)=(A,1) với A là một điểm bất kì trong 2007 điểm đó.

+ Nếu các điểm đều thuộc (O) thì ta có đpcm.

+ Nếu tồn tại một điểm B sao cho AB >1. Khi đó ta xét đường tròn (O')=(B,1)

Và ta thấy , một điểm C bất kì trong 2005 điểm còn lại sẽ có tính chất sau

$\left[\begin{array}{l} AC \le 1 \\ BC \le 1 \end{array}\right.$ vì AB>1. Như vậy theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại một trong 2 đường tròn (O) và (O') chứa ít nhất 1004 điểm (đã kể luôn tâm)

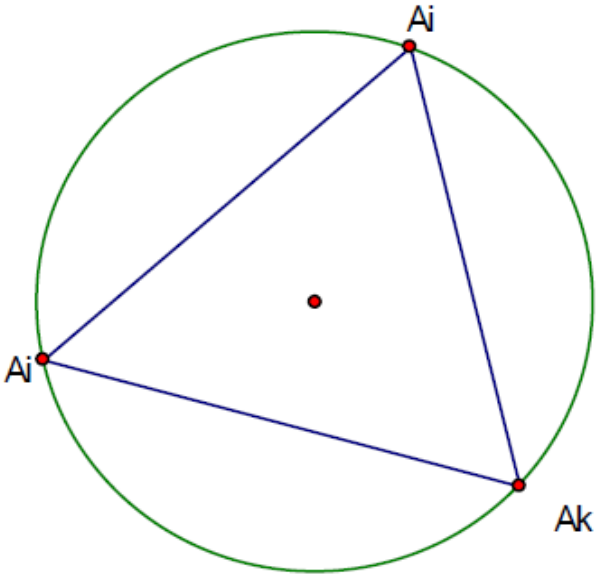
Bài 5.3: *Cho đa giác đều $A_1, A_2, ...A_{1998}$ nội tiếp (O). CMR trong số 64 đỉnh bất kì của đa giác luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.*

Giải: Ta có nhận xét: Nếu có hai dây (được tạo thành từ 1981 đỉnh của đa giác) có độ dài bằng nhau và không có đỉnh chung thì ta sẽ có một hình thang.

Xét độ dài các dây cung $A_1A_2, A_1A_3, ...A_1A_{1981}$ sẽ có $A_1A_2 = A_1A_{1981}$, $A_1A_3 = A_1A_{1980}, \ldots, A_1A_{991} = A_1A_{992}$

Và các độ dài này đôi một khác nhau. Vậy có 990 độ dài các dây cung có một đỉnh là A1 và đó cũng là tất cả các độ dài của các dây cung.

Trong 64 đỉnh sẽ có dây cung suy ra có ít nhất 3 dây cung có cùng độ dài. Nếu các dây cung này đều đôi một có đỉnh chung thì sẽ tạo thành một tam giác đều (vì chỉ có đúng 2 dây cung chung đỉnh có cùng độ dài) như hình vẽ:



Khi đó đường tròn sẽ được chia ra thành 3 cung bằng nhau suy ra số đỉnh của đa giác phải là số nguyên lần của 3, điều này là vô lí vì 1981 không chia hết cho 3. Vậy trong 3 dây cung có cùng độ dài này có ít nhất hai dây cung không có chung đỉnh và tạo thành 1 hình thang (đpcm)

Bài 5.4:*(Trần Quốc Anh) Cho các số thực a,b,c, thỏa mãn* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{6a^2-4a+1}+\frac{b^2}{6b^2-4b+1}+\frac{c^2}{6c^2-4c+1}\le 1$$

Giải: Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số $\left(a-\frac{1}{3}\right),\left(b-\frac{1}{3}\right),\left(c-\frac{1}{3}\right)$ có ít nhất hai số cùng bằng 0 hoặc cụng cùng dấu . Không mất tính tổng quát giả sử đó là $\left(b-\frac{1}{3}\right)$ và $\left(c-\frac{1}{3}\right)$. Ta được : $\left(b-\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{1}{3}\right)\ge 0$. Khi đó:

$$b^2+c^2\le\frac{1}{9}+\left(b+c-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}-a\right)^2$$

Bất đẳng thức cần chứng ,inh tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{b^2}{6b^2-4b+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{c^2}{6c^2-4c+1}\right)\ge\frac{a^2}{6a^2-4a+1}$$

Hay là:

$$\frac{(2b-1)^2}{6b^2-4b+1}+\frac{(2c-1)^2}{6c^2-4c+1}\ge\frac{2a^2}{6a^2-4a+1}$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta được

$$VT\ge\frac{\left[(2b-1)+(2c-1)\right]^2}{(6b^2-4b+1)+(6c^2-4c+1)}=\frac{2a^2}{3(b^2+c^2)+2a-1}$$

$$\geq \frac{2a^2}{3\left[\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}-a\right)^2\right]+2a-1}=\frac{6a^2}{9a^2-6a+2}$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$\frac{6a^2}{9a^2-6a+2}\geq\frac{2a^2}{6a^2-4a+1}$$

Đẳng thức này có thể thu gọn lại thành

$$\frac{2a^2(3a-1)^2}{(9a^2-6a+2)(6a^2-4a+1)}\geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng . Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$,

hoặc $a=b=\frac{1}{2}$ và c = 0

Bài 5.5:*(Lê Trần Nhạc Long) Trong một đường tròn bán kính $\sqrt{3}$ ta tô 2011 điểm bất kì. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đơn vị nằm có tâm nằm trong miền của đường tròn lớn, chứa 288 điểm trong 2011 điểm đó.*

Giải: Nếu các bạn nhìn kĩ thì bài này rất giống với bài VMO 2011- ngày thứ nhất. Và ta cũng sẽ giải nó như sau:

Xét một đường tròn có tâm trùng với tâm của đường tròn lớn . Khi đó xét thêm 6 đường tròn có tâm nằm trên đường tròn và 6 tâm của đường tròn lập thành một lục giác đều có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Ta xét một tam giác đều có cạnh $\sqrt{3}$ thì nó sẽ bị phủ bởi 3 đường tròn đơn vị có tâm nằm trên 3 đỉnh. Tương tự ví dụ 3 ta được đpcm!

Bài 5.6 *Trong mặt phẳng cho n - giác lồi có tọa độ các đỉnh là các số nguyên (n > 4).*

a) CMR ở trên cạnh hoặc trong đa giác đó còn có ít nhất một điểm nguyên khác nữa.

b) CMR bên trong đa giác đó còn có ít nhất một điểm nguyên khác nữa.

Giải:

a) Chia tập các điểm nguyên thành 4 loại: Loại I = (ch; ch), loại I = (ch; lẻ), loại III = (lẻ; ch), loại IV = (lẻ; lẻ). Vì n > 4 nên có ít nhất 5 đỉnh suy ra có ít nhất hai điểm có cùng loại và khi đó trung điểm của hai điểm này có tọa độ nguyên.

b) Xét 5 của đa giác là A, B, C, D, E. Khi đó ta có một ngũ giác lồi ABCDE và các điểm nằm trong ABCDE cũng nằm trong đa giác trên.

Theo câu a, giả sử điểm có tọa độ nguyên I trung điểm của AB. Ta thấy BA có thể là cạnh mà cũng có thể là đường chéo.Xét AB là cạnh thì ta lại có ngũ giác lồi ZBCDE , ngũ giác này cũng có tọa độ các đỉnh nguyên, theo câu a ta có đpcm

Bài 5.7:*Bên trong tam giác đều ABC cạnh 1 đặt 5 điểm. CMR tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 0,5.*

Giải: Ta chia tam giác ABC thành 4 tam bằng nhau (bằng cách vẽ 3 đường trung bình) . Ta dễ thấy rằng 4 này là 4 tam giác đều có cạnh bằng 0,5. Rõ ràng với 5 điểm thì tồn tại một tam giác chứa ít nhất 2 điểm . 2 điểm này hiển nhiên có khoảng cách nhỏ hơn 0,5

Đây là một bài toán dễ và cơ bản , với tư tưởng như thế này các bạn hãy thử làm bài toán sau:

(Đề thi vào lớp 10 Amserdam 2005-2006)

Cho hình vuông ABCD và 2005 đường thẳng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện

1) *Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối diện của hình vuông*
2) *Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ số diện là 0,5*

Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng này có ít nhất 502 đường đồng quy

(gợi ý: xét hai trục đối xứng của hình vuông không là đường chéo , 4 điểm xảy ra sự đồng quy là 4 điểm nằm trên 2 trục đối xứng và đường tròn tâm là tâm của hình vuông bán kính bằng một phần sáu cạnh)

Bài 5.8: *(Vô địch Cộng hòa Czech 1998) Cho X là một tập hợp gồm 14 số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng có một số nguyên dương k ≤ 7 và có hai tập con k phần tử*

$$\{a_1, a_2, ...a_k\}, \{b_1, b_2, ..., b_n\}$$

Rời nhau của X sao cho:

$$\left|\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)-\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_k}\right)\right|<\frac{1}{1000}$$

Giải: Xét $C_{14}^7 = 3423$ tập con 7- phần tử của X. Tổng các nghịch đảo của các phần tử trong mỗi tập con này rõ ràng là không vượt quá $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{7}<2,6$, nên buộc phải thuộc một trong số nửa khoảng:

$$\left(\frac{0}{1000};\frac{1}{1000}\right],\left(\frac{1}{1000};\frac{2}{1000}\right],...,\left(\frac{2599}{1000};\frac{2600}{1000}\right]$$

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai tập con khác nhau có tổng nghịch đảo các phần tử thuộc cùng một nửa khoảng. Loại bỏ khỏi hai tập này các phần tử chung (hai tập con có 7- phần tử khác nhau khi có tối đa 6 phần tử chung), ta sẽ thu được hai tập con có k- phần tử (với k là số nguyên dương k ≤ 7), thỏ mãn yêu cầu bài toán , vì hai tập này cùng nằm trong một khoảng , mà hiệu của số lớn nhất trong khoảng và số nhỏ nhất trong khoảng bé hơn $\frac{1}{1000}$. Vậy bài toán được chứng minh

Bài 5.9: *(Putnam 1993) Cho một dãy gồm 19 số nguyên dương không vượt quá 93 và một dãy số nguyên gồm 93 số nguyên dương không vượt quá 19. Chứng minh rằng từ hai dãy số đó ta có thể trwchs ra hai dãy con có tổng các số hạng là bằng nhau*

Giải: Thực ra bài này có thể đưa về dạng tổng quát sau đây:

Cho hai số nguyên m,n (m,n ≥ 2) và dãy 2 số. Dãy thứ nhất gồm n số nguyên dương không vượt quá n , dãy thứ hai gồm m số nguyên dương không vượt quá n. Chứng minh rằng từ mỗi dãy số đã cho, ta có thể trích ra một dãy con sao cho tổng các số hạng của hai dãy con bằng nhau.

Tôi sẽ đưa ra lời giải cho bài toán tổng quát, thay vì bài trên

Đặt hai dãy số tương ứng là $\{a\}$ và $\{b\}$ với $1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le m$ và $1 \le b_1 \le b_2 \le ... \le b_m \le n$

Đặt $x_p = \sum_{i=1}^{p} a_i (p = \overline{1,n}); y_p = \sum_{i=1}^{q} b_i (q = \overline{1,m})$,

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_n \le y_m$ khi đó với mỗi p tồn tại $f(p) := q$ là chỉ số nhỏ nhất mà $x_p \le y_q$. (1)

Xét n số $y_{f(1)} - x_1, y_{f(2)} - x_2, ..., y_{f(n)} - x_n$, nếu trong n số trên có một số bằng 0 thì ta có đpcm.

Nếu $\exists j, y_{f(j)} - x_j \ge n$ (2) thì ta có $y_{f(j)} > n \Rightarrow f(j) > 1$

Do đó $(2) \Leftrightarrow y_{f(j)-1} + b_{f(j)} - x_j \ge n \Rightarrow y_{f(j)-1} - x_j \ge n - b_{f(j)} \ge 0$ mâu thuẫn với (1)

Vậy ta chỉ cần xét trường hợp n số trên ≥ 1 và $< n$. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại $k \ge l$ sao cho $y_{f(k)} - x_k = y_{f(l)} - x_l$

$$\Rightarrow y_{f(k)} - y_{f(l)} = x_{f(k)} - x_{f(l)} \Rightarrow \sum_{i=f(l)+1}^{f(k)} b_i = \sum_{jl+1}^{k} a_j$$

Đó là điều phải chứng minh

Problem 6: Các bài toán trò chơi.

Trong các bài toán trò chơi thường yêu cầu chúng ta xác định chiến thuật để một trong các người chơi luôn thắng. Đôi khi chiến thuật có thể áp dụng cho mọi trường hợp nhưng cũng có những trường hợp riêng và có người thắng khác nhau. Trên thực tế thì các bài toán trò chơi là một phần của lĩnh vực bất biến , tức ta cần một chiến thuật để một đại lượng không thay đổi để đi đến chiến thắng.

Bốc kẹo

Ví dụ 1*: Trên bàn có 2 đống kẹo gồm 2011 và 2012 viên kẹo 2 người cùng chơi một trò chơi. Họ được bốc một số kẹo bất kì từ mỗi đống và ai là người bốc được viên kẹo cuối cùng trên bàn người đó thắng.*

Giải:

Ta thấy để chiến thắng thì trạng thái số kẹo trên bàn của mỗi đống là (0;0) 2 đống cân bằng nhau. Và trạng thái hiện tại trên bàn là (2011;2012), ta sẽ tìm ra một chiến thuật mà người thắng tạo ra được trạng thái a, đối thủ của mình phá vỡ trạng thái đó và người thắng lại đưa được về trạng thái a. Như đã nói ở trên trạng thái thắng khi 2 đống là 0;0 cân bằng nhau do đó người 1 có thể bốc 1 viên để trạng thái số kẹo trên bàn là (2011;2011), đến lượt người thứ 2 bốc thì dĩ nhiên trạng thái này cân bằng sẽ phá vỡ. Sau đó người thứ nhất có thể đưa số kẹo 2 đống bằng nhau. Vậy sau khi người 2 bốc thì số kẹo 2 đống không bao giờ bằng nhau nên chắc chắn anh ta phải thua.

Tương tự như trên thì nếu số kẹo ban đầu trên bàn ở 2 đống bằng nhau thì người 2 là người có chiến thuật thắng.

Ví dụ 2*: Trên bàn có 100 viên kẹo và 2 người chơi có thể bốc (1;2;k) viên kẹo. Hai người cùng bốc kẹo, ai là người bốc viên kẹo cuối cùng người đó thua.*

Giải:

Ban đầu có 100 viên kẹo thì người thứ nhất có thể đảm bảo "an toàn" cho mình tránh bị thua bằng cách bốc 1 để còn lại 99 viên là một số lẻ. Sau khi người thứ 2 bốc thì người thứ nhất luôn có chiến thuật để bốc sao cho số kẹo sau khi mình bốc là số lẻ nên không thể thua.

Vai trò của k trong bài toán này chỉ mang tính chất phụ họa nhưng với bài toán sau thì bài toán trở nên khác hẳn cà khó hơn nhiều.

Ví dụ 3: *Cho 2011 viên kẹo trên bàn. Hai người chơi trò chơi họ được bốc số kẹo là (1;2;6). Hỏi ai là người có chiến thuật thắng?*

Giải: Thật ra đây là những bài bất biến , không phải tự dưng ta tìm ra những cách giải bất ngờ như thế. Với những bài toán như thế này , một cách giải có thể *"không hay"* nhưng *" hiệu quả"* có thể giải những bài không thể tìm ra được đại lượng bất biến ở đâu

Bài này ban đâu ta sẽ không bắt đầu từ 2011 viên kẹo mà sẽ bắt đầu với số kẹo nhỏ hơn. Giả sử ban đầu trên bàn có n viên kẹo . Nếu n=1,2,3 thì rõ ràng người thứ nhất có chiến thuật thắng (ta gọi đơn giản là "người thứ nhất thắng"). Với n =3 thì người thứ hai thắng bởi người thứ nhất chỉ có thể bộc 1 hoặc 2 viên tương ứng với người thứ hai bốc 2 hoặc 1 viên để thắng. Với n = 4 người thứ nhất thắn bằng cách bốc 1 viên kẹo và đẩy người thứ hai vào thế thua. Tương tự với n= 5 người thứ nhất thắng. Với n=7 người thứ hai thắng vì cả ba cách bốc của người thứ nhất (1,2,6) đều dẫn đến thế thắng cho người thứ hai (tương ứng cìn 6,5,1 viên kẹo trên bàn), n=8 người thứ nhất thắng…

Bằng cách lí luận tương tự ta có bảng sau:

n	1	2	**3**	4	5	6	**7**	8	9	**10**	11	12	13	**14**	15	16	**17**
KQ	1	1	**2**	1	1	1	**2**	1	1	**2**	1	1	1	**2**	1	1	**2**

Từ kết quả của bảng này ta có thher dự đoán được *người thứ nhất sẽ thắng nếu n có số dư là 1 ,2 ,4 ,5 ,6 trong phép chia cho 7 , và người thứ hai sẽ thắng nếu n có số dư là 0 ,3 trong phép chia cho 7*

Sau khi dự đoán ta tìm cách chứng minh chặt chẽ dự đoán của mình bằng quy nạp toán học. Đặt $n = 7k + r$ với $r = 1, 2, ..., 6, 7$ ta chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp theo k . Với $k = 0$ mệnh đề đã được kiểm chứng qua bảng trên

Xét $n = 7(k+1) + r$ với $r = 1, 2, ..., 6, 7$

Nếu $r = 1, 2, 6$ người thứ nhất bốc 1,2,6 viên để đưa về trường hợp trên bàn còn $7k + 7$ viên kẹo là thế thua cho người thứ hai theo giả thiết quy nạp vì thế người thứ nhất thắng

Nếu $r = 3$ người thứ nhất có 3 cách bốc

+ Bốc 1 viên ,còn $7(k+1) + 2$ viên là thế thắng cho người thứ hai (ta vừa chứng minh trên)

+ Bốc 2 viên , còn $7(k+1) + 1$ viên là thế thắng cho người thứ hai (chứng minh trên)

+ Bốc 6 viên, còn $7k + 4$ viên là thế thắng cho người thứ hai (theo giả thiết quy nạp)

Như vậy trường hợp này người thứ nhất thua

Nếu $r = 4, 5$, người thứ nhất bốc tương ứng 1 ,2 viến để đưa về trường hợp $7(k+1) + 3$ là thế thua cho người thứ hai và vì vậy người thứ nhất thắng

Cuối cùng , tường hợp $r = 7$, người thứ nhất có 3 cách bốc

+Bốc 1 viên ,còn $7(k+1) + 6$ là thế thắng cho người thứ hai, (chứng minh ở trên)

+ Bốc 6 viên , còn $7(k+1)+1$ là thế thắng cho người thứ hai (chứng minh trên)

Vậy trường hợp này người thứ nhất thua

Như thế dự đoán của ta đã được chứng minh hoàn toàn

2011 chia 7 dư 2 nên theo lí luận trên người thứ nhất có chiến thuật thắng

Ví dụ 4: *Trên bàn có 2 đống kẹo gồm 2010 và 2011 cây kẹo. 2 người cùng nhau bốc kẹo sao cho nếu chọn một đống bốc thì họ phải bốc số kẹo là ước của đống kia. Ai là người bốc viên kẹo cuối cùng thì người đó thắng.*

Giải:

Người thứ nhất bốc 1 cây ở đống 2010 thì số kẹo 2 bên là một số lẻ. Do đó dù người thứ hai bốc thế nào đi nữa thì số kẹo 2 bên sẽ khác tính chẵn lẻ. Và người thứ nhất tiếp tục bốc 1 cây kẹo ở đống chẵn đưa về trạng thái (lẻ;lẻ). Như vậy sau khi người thứ nhất bốc thì sẽ không có đống nào hết cả. Do đó phải đến một thời điểm người thứ 2 bốc hết số kẹo ở một đống và người thứ nhất chỉ việc bốc số kẹo còn lại của đống còn lại là chiến thắng.

Ở bài này chúng ta lại đến với đại lượng bất biến là chẵn lẻ và ta có thể tổng quát bài toán với 2 đống kẹo là chẵn và lẻ. Các bạn có thể dựa vào bài trên để giải bài toán với 2 đống kẹo (4k+2;4l+2).

Ví dụ 5: *Có 2010 viên sỏi. Hai người chơi thay phiên nhau bốc sỏi, mỗi lượt đi người chơi được qyền bốc một lượng sỏi là lũy thừa với số mũ tự nhiên bất kì của 2(1;2;3;...). Ai bốc được viên sỏi cuối cùng là người chiến tháng. Giả sử cả 2 người chới đều là người thông minh. Hỏi ai là người chiến thắng?*

Giải: ta có 2010 chia hết cho 6 và để ý rằng nếu số kẹo sau một số lần bốc là một bội của 6 như 6,12,18,24 thì người thứ 2 luôn thắng vì vậy nếu người thứ 2 bốc số kẹo sao cho tổng số kẹo của người thứ 2 và người thứ nhất sau mỗi lượt là một bội của 6 thì sau một số lần bốc số kẹo còn lại sẽ là bội "nhỏ" của 6 tức là nằm trong 2 số 24,18,12,6. Vậy người thứ 2 sẽ có chiến thật thắng
Nếu người thứ 1 bốc số kẹo là lũy thừa chẵn chả 2 thì người thứ 2 sẽ bốc số kẹo lũy thừa lẻ (hoặc ngược lại) để bảo toàn số kẹo là bội của 6

Viết số, tô màu

Ví dụ 6: *Hai người cùng chơi một trò chơi. Ban đầu trên bảng có các số là 1,2,3,4. Mỗi lần thực hiện người thứ nhất cộng vào 2 số cạnh nhau một đơn vị, người thứ hai có thể đổi chỗ 2 số cạnh nhau. Hai người thay phiên nhau thực hiện, khi nào các số bằng nhau thì người thứ nhất thắng. Hỏi người thứ hai có cách nào ngăn người thứ nhất thắng hay không?*

Giải:

Câu trả lời là người thứ hai có thể ngăn cản người thứ nhất chiến thắng.Ta thấy sau thao tác đầu tiên người thứ nhất thực hiện thì khoảng cách giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất

thấp nhất là 2. Và số nhỏ nhất chắc chắn phải là số 1 (có thể sau lần đầu nâng lên 2), số lớn nhất là 4(có thể nâng lên 5) người thứ hai chỉ cần để số 1 ngoài cùng và sắp số 4 cạnh số 1, các lần sau chỉ dịch chuyển 2 số ở vị trí còn lại tráo đổi cho nhau thì vì khoảng cách 2 số đầu chênh nhau ít nhất 2 đơn vị và chúng cùng tăng hoặc chỉ số lớn tăng nên không thể bằng nhau.

Ví dụ 7*: Trên bảng có số 2. Hai người chơi trò chơi, nếu trên bảng có số n thì người tiếp theo xóa đi số này và viết vào số n+d với d là ước của n và bé hơn n. Ai là người viết lên bảng số lớn hơn 2011 trước thì người đó thua. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng?*

Giải:

Đầu tiên trên bảng có số 2 thì người thứ nhất chỉ việc cộng thêm vào số 1 để được 1 số lẻ. Do đó sau khi người thứ hai thực hiện thì trên bảng còn lại một số chẵn. Cứ như thế thì sau khi người thứ hai thực hiện thì số trên bảng không thể đạt đến 2011 và người thứ nhất chỉ viết vào số n+1 nên số đó không thể quá 2011 và như vậy người thứ nhất luôn chiến thắng.

Ví dụ 8: *Hai người cùng chơi trò chơi tô màu lên một bảng hình chữ nhật m×n. Đánh số các cột là từ 1 đến m và các hàng là từ 1 đến n. Hai người cùng lần lượt thay phiên tô màu các ô sao cho đến lượt tô của một người thì họ không được tô ô cùng hàng,cùng cột hoặc cùng đường chéo với ô người kia đã tô liền trước đó . Hai người chỉ dùng đúng 2 màu là trắng và đen. Giả sử rằng họ luôn có thể tô kín bảng.Nếu sau khi tô, tồn tại một hình vuống 2×2 thuộc hình chữ nhật có số ô trắng là lẻ thì người thứ nhất thắng. Hỏi người thứ hai có ngăn người thứ nhất thắng được không?*

Giải:

Trong ví dụ này thì người thứ nhất luôn thắng. Chú ý là nếu người thứ nhất lần đầu tô (1;1) thì người thứ nhất sẽ được tô cả 4 ô ở đỉnh hỉnh chữ nhật. Và một điều thật thú vị là chỉ dựa vào 4 ô đỉnh thì người thứ nhất có thể thắng mà không cần quan tâm đến cách tô các ô khác. Thật vậy nếu như người thứ nhất tô 4 ô ở đỉnh trong đó có 3 ô màu trắng một ô màu đen thì luôn tồn tại một hình vuông thỏa mãn đề bài.

Ý tưởng rõ ràng là ta sẽ phản chứng giả sử tất cả các ô 2x2 đều có số chẵn ô màu trắng. Đánh số các cột là 1 đến m và các hàng là 1 đến n.

Xét 2 ô (1;i) (tức hàng 1 cột i) và ô (1;i+1) thì tổng số ô trắng của 2 ô này với 2 ô (2;i) và (2;i+1) là số chẵn, ô (2;i)+(2;i+1)+(3;i)+(3;i+1) cũng là số chẵn nên suy ra (1;i)+(1;i+1)+(3;i)+(3;i+1) là số chẵn và cứ như thế thì ta suy ra (1;i)+(1;i+1)+(n;i)+(n;i+1) là số chẵn.
Xét 2 đỉnh màu trắng cùng nằm trên 1 cột thì 2 ô này vs 2 ô bên cạnh của mỗi ô này có tổng ô trắng là số chẵn suy ra 2 ô cạnh mỗi ô này cùng màu, tiếp tục như thế 2 ô cạnh 2 ô đó lại cùng màu,... dẫn đến 2 ô cuối cùng của 2 hàng cùng màu, điều này vô lí vì 2 ô đó là 1 trắng 1 đen.

Bài toán trên rất thú vị ở chỗ nó không cần một quá trình nhất định mang tính bất biến như những bài toán trên mà chỉ cần quan tâm đến một vài vị trí đặc biệt quyết định. Trên thực tế nếu suy nghĩ tìm một lời giải cho cách tô ngay từ giả thiết là một điều rất khó!!

Problem 7: Giới thiệu sơ lược định lí Ramsey-số Ramsey

" Thượng đế tạo ra số tự nhiên, còn tất cả các loại số khác đều là công trình sáng tạo của con người"

Như đã nói ở ví dụ 1 trong phần này ta sẽ tổng quát nó

Trong phần này với kiến thức lớp 10 ta chỉ thể hiện bằng ngôn ngữ quen thuộc và chỉ sơ lược một vài trường hợp của định lí:(ta sẽ thể hiện bằng ngôn ngữ "quen nhau")

số người **nhỏ nhất** *sao cho trong số chừng ấy người bất kỳ, tồn tại m người đôi một quen nhau hoặc n người đôi một không quen nhau".*

"Chừng ấy người đó chính là R(m,n)-số Ramsey

Và ta có tính chất của số Ramsey như sau:

Hệ quả:

$$R(m,n) \le R(m-1,n) + R(m,n-1)$$

$$\Leftrightarrow R(m,n) \le \binom{m+n-2}{m-1} = C_{m+n-2}^{m-1}$$

và $$R(m,n) = R(n,m)$$

Các đẳng được chứng minh qua một số trường hợp trong bảng sau:

m,n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	40–43
4	1	4	9	18	25	35–41	49–61	56–84	73–115	92–149
5	1	5	14	25	43–49	58–87	80–143	101–216	125–316	143–442
6	1	6	18	35–41	58–87	102–165	113–298	127–495	169–780	179–1171
7	1	7	23	49–61	80–143	113–298	205–540	216–1031	233–1713	289–2826
8	1	8	28	56–84	101–216	127–495	216–1031	282–1870	317–3583	317-6090
9	1	9	36	73–115	125–316	169–780	233–1713	317–3583	565–6588	580–12677
10	1	10	40–43	92–149	143–442	179–1171	289–2826	317-6090	580–12677	798–23556

Định lí Ramsey đã được chứng minh từ lâu nhưng hiện nay người ta vẫn chưa xác định được số R(m,n) bất kì và theo ngôn ngữ toán học thì không phải như thế này mà dùng khái niệm tô 2 màu, mà nó còn mở rộng cho bộ R(m,n,r) nhưng với kiến thức chúng ta hiện tại để dễ hiểu ta nên đưa về ngôn ngữ như trên.

Các bài toán về một số trường hợp của định lí Ramsey ở các bài như ***ví dụ 1 , bài 1.4*** *,*

Với tư tưởng của những bài đó bằng cách dùng đồ thi các bạn hãy giải với các số R(4,4) ; R(4;5)

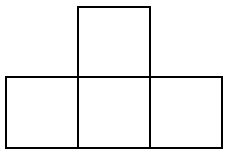
Và để kết thúc bài viết xin dành tặng bạn đọc một số bài tập tổng hợp sau:

Một số bài tập tổng hợp

Bài 1: Cho đa giác n cạnh trên mặt phẳng tọa độ với các đỉnh nguyên và độ dài các cạnh nguyên. Chứng minh chu vi đa giác là một số chẵn.

Bài 2: (Olympic 30/4 2010 lớp 10) Trong một môn thi đấu thể thao có x tấm HCV được phát trong n ngày. Ngày thứ nhất người ta phát 1 HCV và $\frac{1}{10}$ số HC còn lại. Ngày thứ hai, người ta phát 2 tấm HC và $\frac{1}{10}$ số HC còn lại. Tương tự, ngày thứ k người ta phát k tấm HC với $3 \le k < n$. Vào ngày cuối cùng, còn đúng n n tấm HC để phát. Hỏi môn thể thao đó có bao nhiêu tấm HC và được phát trong bao nhiêu ngày?

Bài 3: Cho hình (T) như sau:



Hỏi có thể phủ kín một hình vuông 10x10 bởi các hình này không?

Bài 4: Trên mặt phẳng có n điểm (n>3) mà không có bất cứ 3 điểm nào thẳng hàng và không có 4 điểm nào cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh tồn tại một đường tròn đi qua 3 điểm trong n điểm đó mà chứa bất kì điểm nào trong các điểm còn lại?

Bài 5: Trên mỗi ô của bảng kẻ ô vuông 8x8 có ghi một số , số này là tích của chỉ số hàng và chỉ số cột của ô ấy. Lấy ra 8 ô bất kì và trong 8 ô ấy không có 2 ô nào cùng nằm trong cùng một hàng hoặc nằm trong cùng một cột . Chứng minh rằng tích của các số nằm trong các ô này là không đổi

Bài 6: Cho một bộ số lượng 2^k các số +1 và -1. Từ đó ta nhận được bộ số mới bằng cách : Mỗi số nhân với số tiếp theo , số cuối cùng nhân với số đầu tiên. Với bộ số mới lặp lại thao tác trên liên tục. Chứng minh rằng cuối cùng ta có nhận được chỉ có số +1 được không?

Bài 7: Cho một số điểm màu đỏ và màu xanh . Một số trong chúng nối với nhau thành một đọa thẳng. Ta nói rằng một điểm gọi là *đặc biệt* nếu hơn một nửa các điểm còn lại nối với nó và có màu khác với màu của nó .Nếu tồn tại điểm *đặc biệt* ta chọn điểm *đặc biệt* này và tô lên nó một màu khác . Chứng minh sau một hữu hạn bước không còn một điểm *đặc biệt* nào

Bài 8: Trên mặt phẳng cho N điểm , từ chúng có thể nối với nhau thành những đoạn thẳng. Biết từ 1 điểm bất kì không xuất phát quá 11 đoạn thẳng. Chứng minh những điểm này có thể tô bằng 4 màu sao cho những đoạn thẳng có 2 đầu mút cùng màu không vượt quá N

Bài 9: Cho n ($n \ge 2$) học sinh đứng thành một hàng dọc để tập thể dục. sau mỗi lần thầy giáo thổi còi có 2 học sinh đổi chỗ cho nhau. Hỏi sau một số lẻ lần thầy giáo thổi còi các học sinh có trở lại trạng thái ban đầu không?

Bài 10: (Nam Tư, 75) Trong một hội nghị nọ cứ 2 người quen nhau bất kì thì không có người quen chung , còn có 2 người không quen nhau nhau bất kì thì có đúng 2 người quen chung. Chứng minh rằng trong hội này, tất cả mọi người đều có số người quen chung

Bài 11: (Bungari,79) Trên một tờ giấy kẻ ô vuông đánh dấu n ô. Chứng minh rằng từ chúng luôn có thể nhận được không ít hơn $\frac{n}{4}$ ô vuông đôi một không tiếp xúc với nhau (ô vuông được coi là tiếp xúc với nhau nếu có ít nhất 1 đỉnh chung)

Bài 12: (Nam từ , 74) Trên một bàn cờ kích thước 8 × 8 có 8 quân cờ trắng đứng trên hàng ngang thứ nhất và 8 quân cờ đen nằm trên hàng ngang thứ tám. Các đấu thủ lần lượt đi (trắng đi trước) bằng cách di chuyển một quân cờ theo hàng dọc một hoặc vài ô về phía trước hay phía sau. Không được phép bỏ quân ra khỏi bàn, hay đi vào ô đã có quân của đối phương đứng , hoặc nhảy qua nó. Người thua cuộc là người không có nước đi nào nữa

Bài 13 Một tấm bảng ô vuông vô hạn và có các quân cờ đứng thành hàng tạo thành hình chữ nhật 3k × n. Có một trò chơi theo các nguyên tắc sau: mỗi quân cờ có thể nhay qua quân cờ bất kì bên cạnh mình (theo chiều dọc hoặc chiều ngang) vào ô trống , sau đó quân cờ bị nhảy qua ta lấy ra khỏi bàn cờ. Chứng minh rằng trên bảng không bao giờ còn lại đúng một quân cờ

Bài 14: Cho trước một đa diện lồi với n ≥ 5 mặt, mà từ mỗi đỉnh của no có đúng 3 cạnh. Hai người chơi một trò chơi như sau: Mỗi người lần lượt viết tên mình lên một từ các mặt còn trống. Để thắng người chơi cần viết tên mình lên 3 mặt có cùng đỉnh chung. Chứng minh rằng tồn tại một cách chơi mà người thứ nhất luôn thắng

Bài 15* : Số lơn nhất các con xe có thể đặt trên các bàn cờ 3n × 3n có thể là bao nhiêu để sao cho mỗi con xe chỉ bị *ăn* không nhiều hơn một trong các con xe còn lại

Bài 16: Trong một thành phố " **Hữu Nghị"** có tất cả 10.000 công dân . Cứ bất kì 2 người dân thì hoặc là bạn của nhau, hoặc là kẻ thù của nhau. Hằng ngày không nhiều hơn 1 người cãi nhau với các bạn của mình và làm lành với kẻ thù của mình . Mặt khác 3 người dân nào cũng có thể làm bạn với nhau. Chứng minh rằng sau một số ngày nào đó tất cả mọi người sẽ là bạn của nhau . Hỏi số ngày ít nhất cần phải có là bao nhiêu ?

Bài 17: (HSG lớp 9- Vĩnh Phúc ,2010) Mỗi ô vuông đơn vị của bảng kích thước 10x10 (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kì hai số nào ghi trong hai ô chung một cạnh hoặc hai ô chung một đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có số được ghi ít nhất 17 lần.

Bài 18: CMR: $n \geq 2$ luôn tồn tại 1 tập hợp gồm n số nguyên dương sao cho tổng 2 số bất kì chia hết hiệu của chúng.

Bài 19: Chứng minh rằng với bất kì cách chia tập {1,2,3,...,3n} thành 3 lớp 3 phần tử, chúng ta luôn chọn được từ mỗi lớp 1 số sao cho 1 trong 3 số chọn ra là tổng 2 số còn lại.

Bài 20: Giả sử có 1 cách chia các số $1, 2, 3, .., 100$ thành 7 lớp . CMR: Tồn tại 1 vài lớp mà trong mỗi lớp có 4 số phân biệt a, b, c, d mà $a+b=c+d$ hoặc 3 số phân biệt e, f, g sao cho $e+f=2g$

Bài 21: Trong một cuộc lấy ý kiến về 7 vấn đề, người được hỏi ghi vào một phiếu trả lời sẵn bằng cách để nguyên hoặc phủ định các câu trả lời tương ứng với 7 vấn đề đã nêu.Chứng minh rằng với 1153 người được hỏi luôn tìm được 10 người trả lời giống hệt nhau.

Bài 22: Cho 36 số nguyên, trong đó tích của 5 số bất kỳ trong các số đó là một số nguyên âm. Chứng tỏ rằng tích của 36 số đã cho là một số nguyên dương

Bài 23: (VMO-2010) Cho bảng 3×3 , n là một số nguyên dương cho trước, tìm số cách tô màu không như nhau khi tô mỗi ô bởi 1 trong n màu

Hai cách tô được gọi là như nhau nếu mỗi 1 cách nhận được từ cách kia bằng phép quay tâm

Bài 24: Người ta dùng 4 màu để tô tất cả các đỉnh của một thất giác đều sao cho mỗi đỉnh được tô bởi một màu và hai đỉnh kề nhau được tô bằng 2 màu khác nhau. Hai cách tô thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là như nhau nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia qua phép quay tâm của thất giác. Hỏi có bao nhiêu cách quay đôi một không như nhau?

Bài 25: Cho 12 đa giác đều. Tại A_{12} , người ta ghi một dấu $"-"$, còn ở tất cả các đỉnh còn lại, ở mỗi đỉnh người ta ghi một dấu $"+"$. Cho phép thay đổi các dấu theo quy tắc sau: Mỗi lần lấy 3 dấu của một ta giác cân, không cân rồi thay mỗi dấu bằng dấu ngược lại. Hỏi nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép thay dấu nói trên đối với đa giác ban đầu, ta có thể nhận được đa giác $A_1A_2...A_{12}$ mà tại đỉnh A_1 ghi dấu $"-"$, còn tất cả các đỉnh khác ghi dấu $"+"$

Tài liệu tham khảo:

- *w.w.w.diendantoanhoc.net*
- *w.w.w.mathscope.org*
- *Lí thuyết tổ hợp (Ngô Thế Phiệt)*
- *Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Trung Quốc*
- *Các đề thi vô địch Toán 19 nước (trong đó có Việt Nam)*
- *Vietnamese IMO Team Training camp 2010 (Trần Nam Dũng)*
- *Nguyên lí Dirichlet và ứng dụng (Tài liệu Mathscope)*
- *Đơn biến, bất biến và ứng dụng (Trần Nam Dũng)*